2.3.3 Änderungsraten

Zu jeder Zustandsgröße gehört (mindestens) eine Änderungsrate

Zustandsgrößen sind, wie oben gezeigt, nicht direkt über eine Funktion aus anderen Systemgrößen berechenbar. Zustandsgrößen unterliegen also keinen *unmittelbaren* Einflüssen, sondern nur zeitlich *vermittelten Einflüssen*. Es gilt der allgemeine Zusammenhang:

neuer Zustand = alter Zustand + Änderung

Es ist sinnvoll, die Änderung der Zustandsgröße Z nicht einfach als Betrag ΔZ anzugeben, sondern die Änderung auf ein Produkt aus Zeitintervall Δt und Änderungs*rate* $\Delta Z/\Delta t$ zurückzuführen, denn der Quotient hat in vielen physikalischen Fällen eine eigenständige begriffliche Bedeutung (vgl. die Aktivität und die Beschleunigung in den obigen Beispielen).

neuer Zustand = alter Zustand + Änderung

neuer Zustand = alter Zustand + (Änderungsrate · Zeitintervall)

$$Z(t_i + \Delta t) = Z(t_i) \ + \ R(\Delta t_i) \cdot \Delta t$$

Die *Änderungsrate* $R(\Delta t_i)$ [6] ist die zweite Kategorie, nach der man die in einer Systembeschreibung auftretenden Größen unterscheidet. Änderungsraten stehen für die *Intensität* der Änderung einer Zustandsgröße. Änderungsraten sind immer auf ein *Zeitintervall* bezogen.[7] Das schlägt sich auch in den Einheiten nieder. Wenn die Zustandsgröße die Einheit „irgendwas“ hat, dann hat die Änderungsrate die Einheit „irgendwas pro Zeiteinheit“.

Zwei physikalische Beispiele:

$$Q(t_i + \Delta t) = Q(t_i) + I(\Delta t_i) \cdot \Delta t$$

Die Ladungsmenge Q auf einem Kondensator ändert sich in einem Zeitintervall Δt entsprechend der in diesem Zeitintervall herrschenden Stromstärke I. Die Stromstärke ist die Intensität der Ladungsänderung. [Q]=As; [I]=As/s.

$$p_x(t_i + \Delta t) = p_x(t_i) + F_x(\Delta t_i) \cdot \Delta t$$

Der Impuls p_x eines Körpers ändert sich in einem Zeitintervall Δt entsprechend der an ihm angreifenden Kraft F_x. Die Kraft ist die Intensität der Impulsänderung. [p]=m/s; [F]=(m/s)/s. Solche Differenzengleichungen sind dem Physiker geläufig — mehr noch in der Schreibweise als Differentialgleichungen, z.B. :

$$\frac{dQ}{dt} = I \ \text{ bzw. } \ I = \dot{Q} \ \Rightarrow \ Q(t) = \int I \cdot dt \ \text{ oder } \ \frac{dp_x}{dt} = F_x \ \text{ bzw. } \ F = \dot{p}_x \ \Rightarrow \ p_x(t) = \int F \cdot dt$$

Betrachtet man das Modell als *mathematisches Modell*, bestehend aus einem Satz von Differenzengleichungen und Funktionen, so sind darin die Änderungsraten die Differenzenquotienten und die Zustandsgrößen die Integrale. Das Modellbildungssystem übernimmt die numerische Integration der Differential- bzw. Differenzengleichung, um den zeitlichen Verlauf der Zustandsgröße Z(t) vorherzusagen (zur Numerik siehe Punkt 3).

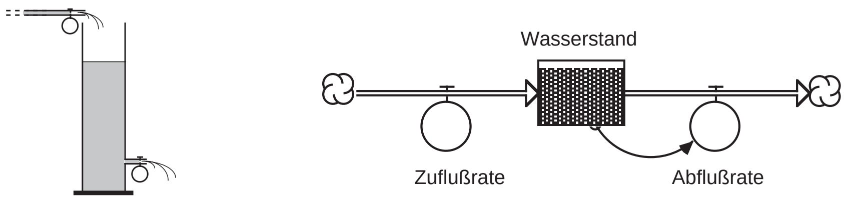
---

6 Δt_i meint das i-te Zeitintervall; $R(\Delta t_i)$ ist die Änderungsrate im i-ten Zeitintervall von t_i bis t_{i+1}.

7 Bei der numerischen Simulation ist $R(\Delta t_i)$ die *mittlere* Änderungsrate im Zeitintervall Δt_i. Wie die Mittelung vorgenommen wird, ist in Kapitel 3 beschrieben.

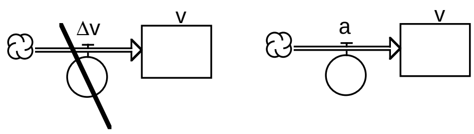
Änderungsraten regulieren Flüsse

Anschaulich gesehen steuern oder regeln Änderungsraten die Zu- oder Abnahme der zugehörigen Zustandsgröße. Wenn die Zustandsgröße für etwas Materielles oder quasi-Materielles steht, kann man sich Änderungsraten wie ein Ventil vorstellen, das den Zu- oder Abfluß der Zustandsgröße reguliert. Bei STELLA werden Änderungsraten daher als eine Art Rohrschieber symbolisiert. Änderungsraten werden auch als *Flußraten* bezeichnet (engl. *rate of flow* oder kurz *flow*).



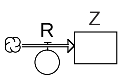
2.6 Veranschaulichung des Ratenkonzepts. Beim Standzylinder regulieren die beiden Ventile den Zufluß und den Abfluß des Wassers. Im Modell deutet der Pfeil von der Zustandsgröße Wasserstand zur Abflußrate an, daß die Abflußrate im Gegensatz zur Zuflußrate nicht konstant ist, sondern vom Wasserstand abhängt.

Wichtig ist die Unterscheidung zwischen der Änderungs*rate* und der Änderung selbst, bzw. der Fluß*rate* und dem Fluß. Das Ventilsymbol steht für die *Rate* und nicht etwa für die dadurch zeitlich bewirkte Änderung. Bei der Kondensatorauf- oder -entladung ist die Stromstärke die Änderungsrate der Ladungsmenge, während die Änderung in einer „Portion" Ladungsmenge besteht. Für einen Geschwindigkeitsverlauf gilt entsprechendes (s. Abb. 2.7).

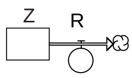


2.7 Die Änderungs*rate* der Geschwindigkeit ist physikalisch gesehen nicht einfach die Geschwindigkeitsänderung Δv, sondern die *Intensität* der Geschwindigkeitsänderung, also die Beschleunigung $a=\Delta v/\Delta t$.

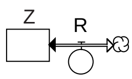
STELLA verwendet drei unterschiedliche Symbole für Raten R(t):



nur positive Werte von R werden zugelassen: $0 < R(t) < \infty$,



nur negative Werte von R werden zugelassen: $-\infty < R(t) < 0$



für R werden beliebige Werte zugelassen: $-\infty < R(t) < \infty$

Viele vermeintliche „Fehler“ in STELLA-Modellen sind einfach darauf zurückzuführen, daß der Nutzer vergessen hat, beliebige Werte für die Raten zuzulassen.[8] Eine Begrenzung auf nur positive oder nur negative Werte macht in der Physik nur in wenigen Fällen Sinn. Um diese Fehlerquelle auszuschalten, sollte man sich angewöhnen, bei jeder Quantifizierung einer Rate gleichzeitig auf den Doppelpfeil in beide Richtungen umzuschalten.

Zustandsgröße und Änderungsrate zugleich?

In manchen Modellen tritt eine physikalische Größe in doppelter Funktion auf — sowohl als Zustandsgröße wie auch als Änderungsrate. In kinematischen Modellen ist das z.B. bei der Geschwindigkeit der Fall. Das erscheint auf den ersten Blick verwirrend.

Handelt es sich wirklich um dieselbe Größe?

Die Antwort setzt eine Auseinandersetzung mit der Numerik des Lösungsverfahrens voraus (s. dazu Punkt 3). Zustandsgrößen sind *Zeitpunkten* t_i zugeordnet. Zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t_i hat die Geschwindigkeit $v(t_i)$ als Zustandsgröße jeweils bestimmte, diskrete Werte. Das gleiche gilt für den Ort $s(t_i)$. Änderungsraten sind dagegen keinen Zeitpunkten sondern *Zeitintervallen* Δt_i zugeordnet. Im Modell muß man daher zwischen der Zustandsgröße *Momentan*geschwindigkeit $v(t_i)$ und der Änderungsrate *Intervall*geschwindigkeit $v(\Delta t_i)$ unterscheiden. Man kann in erster Näherung den *Wert* der Momentangeschwindigkeit $v(t_i)$ als *Wert* der Intervallgeschwindigkeit im folgenden Zeitintervall $[t_i, t_i+\Delta t]$ übernehmen. Für genauere Abschätzungen der Intervallgeschwindigkeit verwendet man bessere Verfahren.

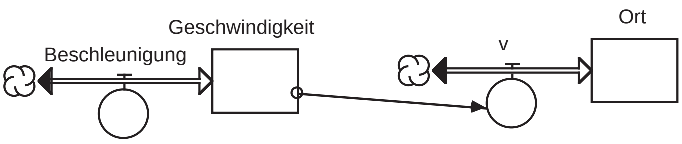
Wird die Physik dadurch unnötig kompliziert?

Auch bei einer analytischen Betrachtung des Vorgangs begegnet man der Geschwindigkeit in zwei unterschiedlichen Zusammenhängen, wenn man die Differentialgleichung zweiter Ordnung $a(t)=d^2s(t)/dt^2$ für die Integration in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung aufspaltet: $a(t)=dv(t)/dt$; $v(t)=ds(t)/dt$. Bei deren Integration erscheint $v(t)$ einmal als Integral und einmal als Integrand:

$$v(t) = \int a(t) \cdot dt$$

$$s(t) = \int v(t) \cdot dt$$

Bei der Verdopplung von v handelt es sich also nicht um eine Besonderheit der Systemdynamik. Die Unterscheidung zwischen Momentangeschwindigkeit und Intervallgeschwindigkeit, die bei der numerischen Lösung auftritt, ist allerdings bei der analytischen Betrachtung wegen des Grenzübergangs $\Delta t \to 0$ nicht mehr notwendig.




```
Geschwindigkeit(t) = Geschwindigkeit(t - dt) + (Beschleunigung) * dt
INIT Geschwindigkeit = 0 {m}
INFLOWS:
    Beschleunigung = 2 {m/s^2}
Ort(t) = Ort(t - dt) + (v) * dt
INIT Ort = 0.1 {m}
INFLOWS:
    v = Geschwindigkeit
```

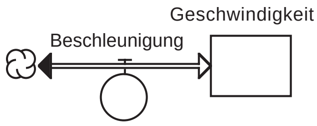
2.8 Geschwindigkeit in doppelter Funktion als Zustandsgröße Geschwindigkeit und Änderungsrate v.

8 Ab STELLA 4.0 kann diese Voreinstellung gespeichert werden. Man sollte darüberhinaus die Option fest einstellen, daß Zustandsgrößen positive und negative Werte annehmen können.

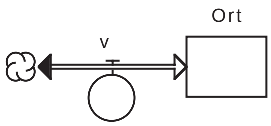
Wie erkläre ich das den Schülern?

Entweder nutzt man das Problem physikalisch produktiv zur Unterscheidung zwischen Momentan- und Intervallgeschwindigkeit — ggf. im Zusammenhang mit der Auswertung entsprechender Experimente — oder man umgeht das Problem durch eine bewußt verkürzte Erläuterung:

- Die Beschleunigung ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit. Damit werden die Geschwindigkeiten zu bestimmten Zeitpunkten berechnet.



- Die Geschwindigkeit ist ihrerseits gleichzeitig die Änderungsrate des Ortes. Der Wert dieser Änderungsrate entspricht gerade demjenigen der jeweils herrschenden Geschwindigkeit.



- Zustandsgrößen können nur durch Änderungsraten verändert werden. Man kann keinen Pfeil direkt von Geschwindigkeit nach Ort ziehen, sondern muß die Geschwindigkeit ein zweites Mal in das Modell einführen. Da die Software jeden Namen nur einmal akzeptiert, kann die Änderungsrate nicht einfach wieder Geschwindigkeit genannt werden. Die Werte von v und Geschwindigkeit sind jedoch gleich.

Man macht mit dieser Erklärung zwei Fehler:

- Die Größen v und Geschwindigkeit haben nicht „gleichzeitig“ bestimmte Werte. Die Unterschiede zwischen Differentialgleichung und Differenzengleichung werden verwischt.
- Die Größen v und Geschwindigkeit haben bei Differenzengleichungen nur dann den gleichen Wert, wenn man die numerische Lösung nach dem Euler-Verfahren vornimmt.

Eine klare begriffliche Unterscheidung zwischen Momentan- und Intervallgeschwindigkeit bringt ebenfalls Probleme mit sich — spätestens dann, wenn im Modell die Änderungsrate Geschwindigkeit quantifiziert werden soll. Dies führt nämlich zu der Gleichung v=Geschwindigkeit.

Die Gleichung suggeriert, daß v und Geschwindigkeit eigentlich doch die gleiche Größe sei, oder zumindest, daß beide Größen den gleichen Wert hätten.

Man kann die Vereinfachungen der verkürzten Erklärung durchaus hinnehmen. Bei der Einführung in die Arbeit mit Modellbildungssystemen im Unterricht wird das Verständnis der systemdynamischen Herangehensweise durch eine zu frühe Vertiefung der Numerik eher erschwert. Die gewisse „Schlampigkeit“ der Erklärung, d.h. das Verwischen der Grenzen zwischen Differenzen- und Differentialgleichung, ist für das grundlegende physikalische Verständnis des Bewegungsvorgangs zumindest nicht schädlich. Im praktischen Vorgehen bei der Auswertung von Experimenten macht man häufig die gleichen Vereinfachungen.