

Ein alternativer Zugang zur Relativitätstheorie

# Physik der Raumzeit

*F. Herrmann und M. Pohlig*



[www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de](http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de)

[pohlig@kit.edu](mailto:pohlig@kit.edu)

# Physik der Raumzeit - Ein Unterrichtsgang

6.1 Bezugssystem und Nullpunkt einer Größe

6.2 Erscheinungen in unterschiedlichen Bezugssystemen

6.3 Schwebende Bezugssysteme

7. Die Grenzggeschwindigkeit

7.1 Masse gleich Energie

7.2 Energie hat die Eigenschaften von Masse

7.3 Masse hat die Eigenschaften von Energie

7.4 Ruhmasse und Ruheenergie

7.5 Wie die Geschwindigkeit vom Impuls abhängt

7.6 Die Geschwindigkeit bei Bezugssystemwechsel

7.7 Wie die Energie vom Impuls abhängt

7.8 Teilchenbeschleuniger

7.9 Licht

7.10 Uhren im Gravitationsfeld

7.11 Himmelskörper

8.1 Darstellungsfragen, Bezeichnungen

8.2 Der zeitliche Abstand zwischen zwei Raumzeit-Punkten

8.3 Zeitreisen – das Zwillingsparadoxon

8.4 Bewegung auf einer Kreisbahn, GPS

8.5 Der Raumzeit-Abstand

8.6 Längen und Zeitdauern bei Bezugssystemwechsel

8.7 Die Gleichzeitigkeit ist nicht mehr was sie einmal war

8.8 Noch einmal die Grenzggeschwindigkeit

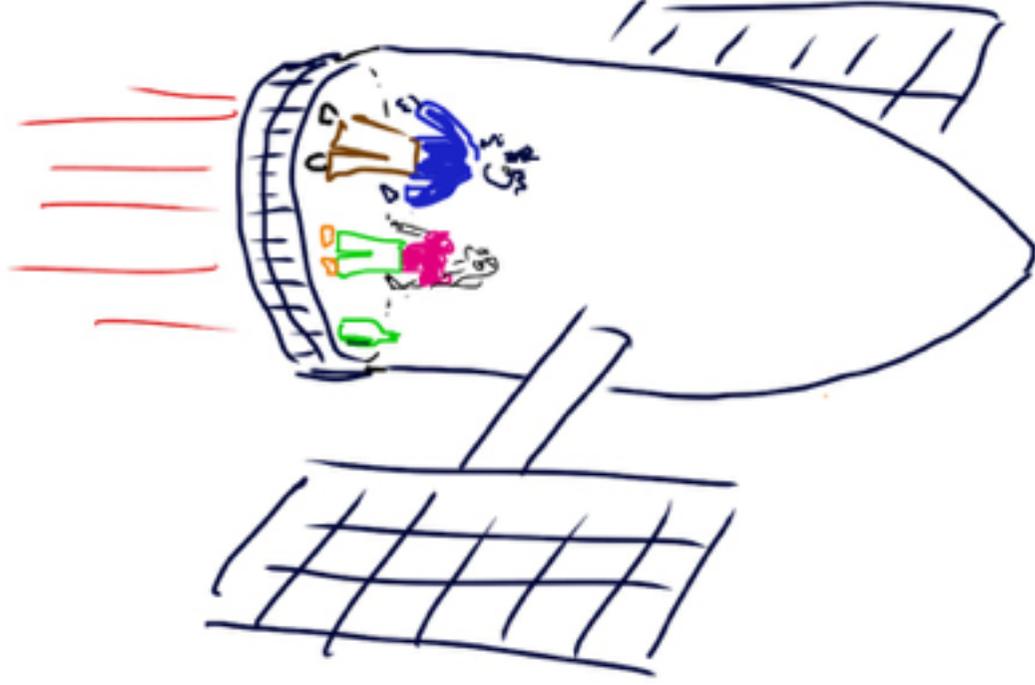
8.9 GPS-Korrektur aus einer anderen Perspektive

8.10 Rückblick auf Intervalle

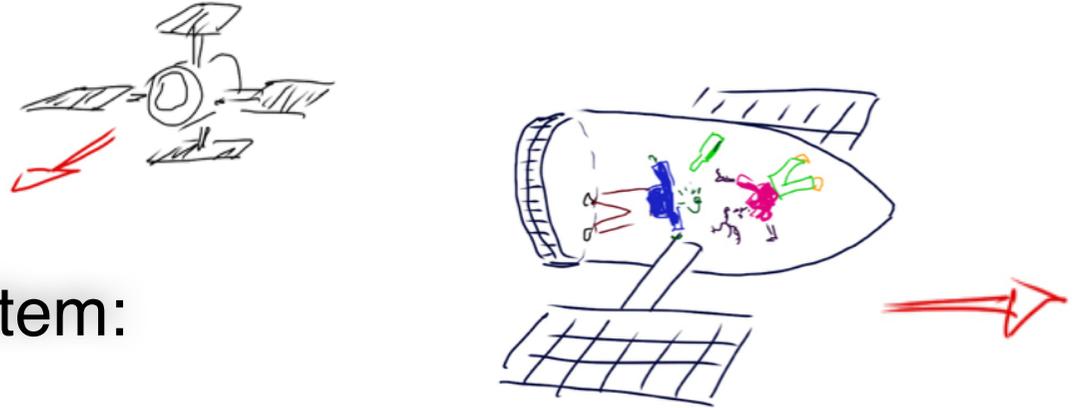
## 6.3 Schwebende Bezugssysteme



## 6.3 Schwebende Bezugssysteme



## 6.3 Schwebende Bezugssysteme



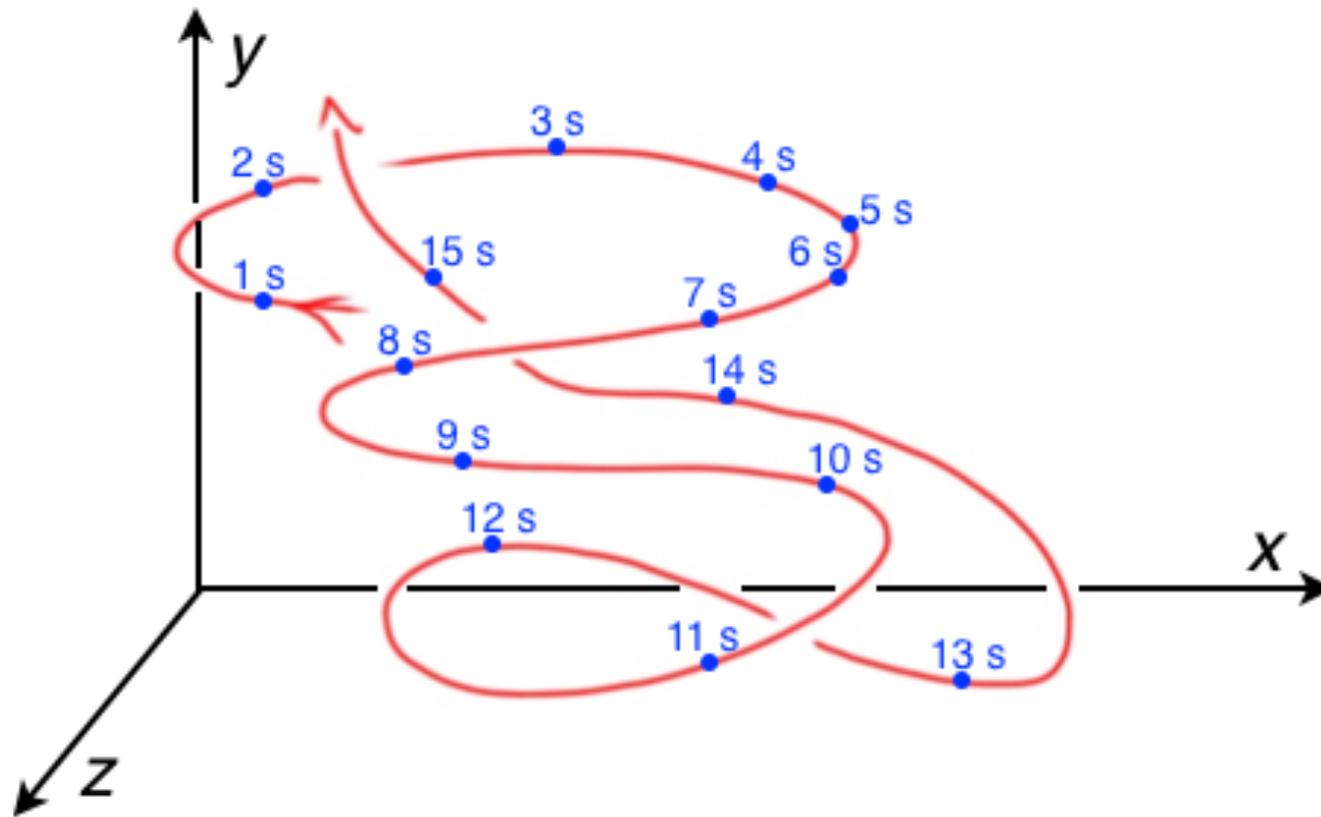
Schwebendes Bezugssystem:

Ein Körper, der sich selbst überlassen ist, bewegt sich nicht oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

In einem schwebenden Bezugssystem ist die Physik besonders einfach.

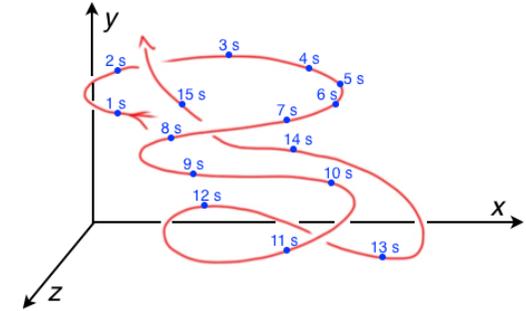
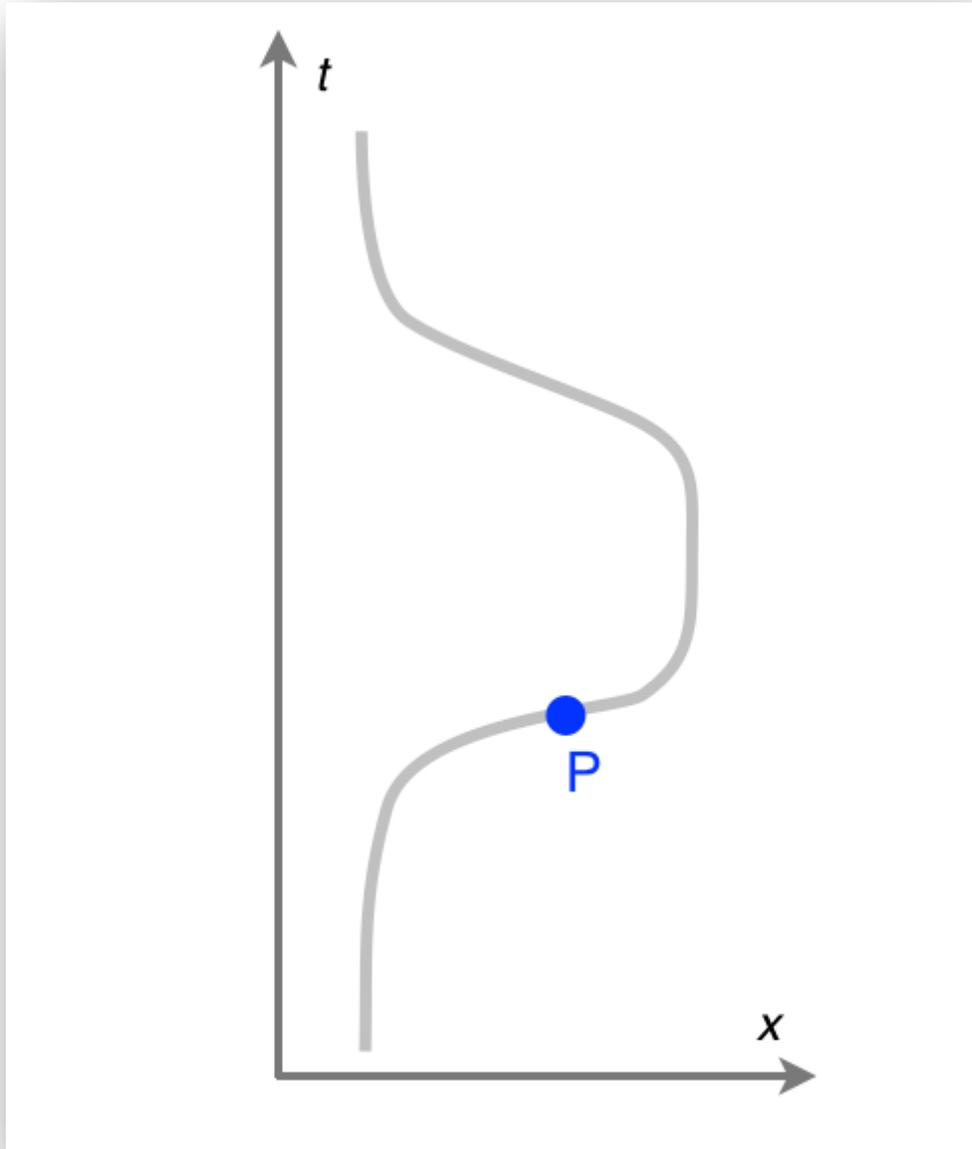
Jedes Bezugssystem, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen ein schwebendes Bezugssystem bewegt, ist auch ein schwebendes Bezugssystem.

# 8.1 Darstellungsfragen, Bezeichnungen



Bahnkurve

# 8.1 Darstellungsfragen, Bezeichnungen

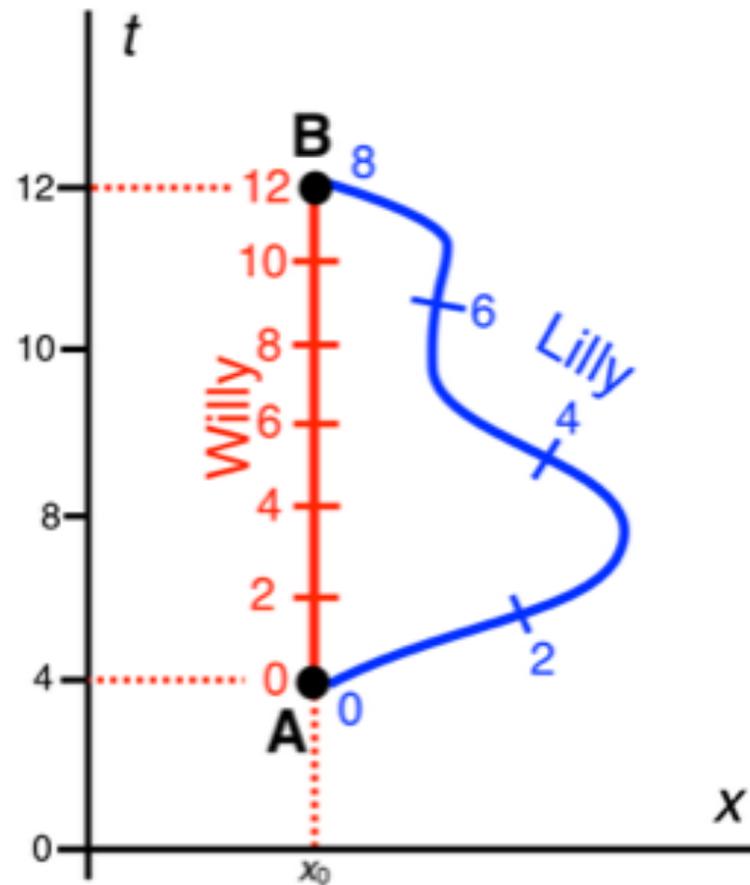


Bahnkurve

## Weltlinie

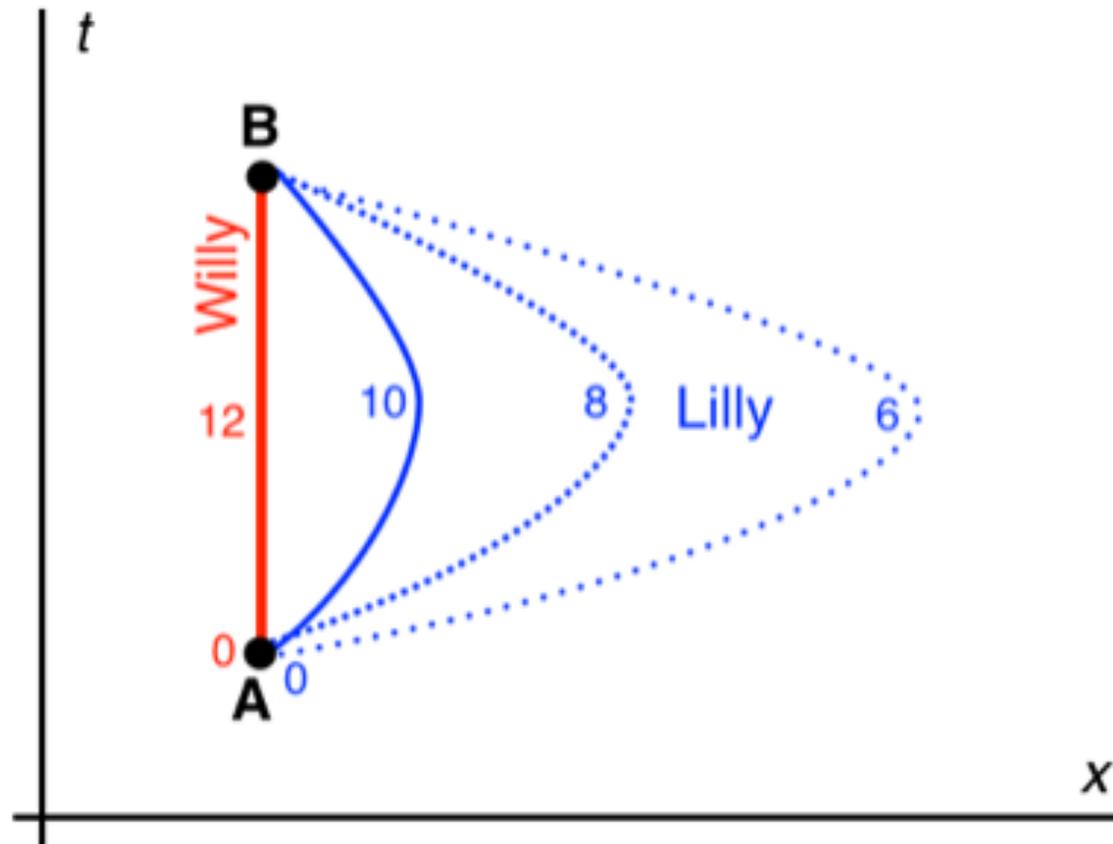
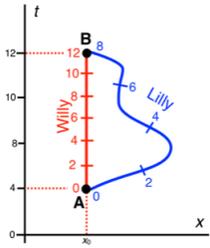
Eine Weltlinie beschreibt die Bewegung eines Körpers. Sie sagt uns, an welchem Ort sich ein Körper zu verschiedenen Zeitpunkten befindet.

## 8.2 Abstand zwischen zwei Raumzeit-Punkten



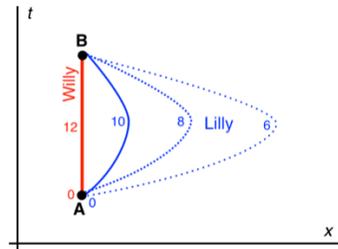
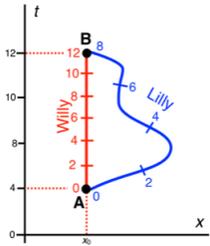
Wenn sich zwei Personen mit ihren Uhren trennen (Ereignis A) und später wieder treffen (Ereignis B), so zeigen die Uhren unterschiedliche Zeiten an.

## 8.2 Abstand zwischen zwei Raumzeit-Punkten

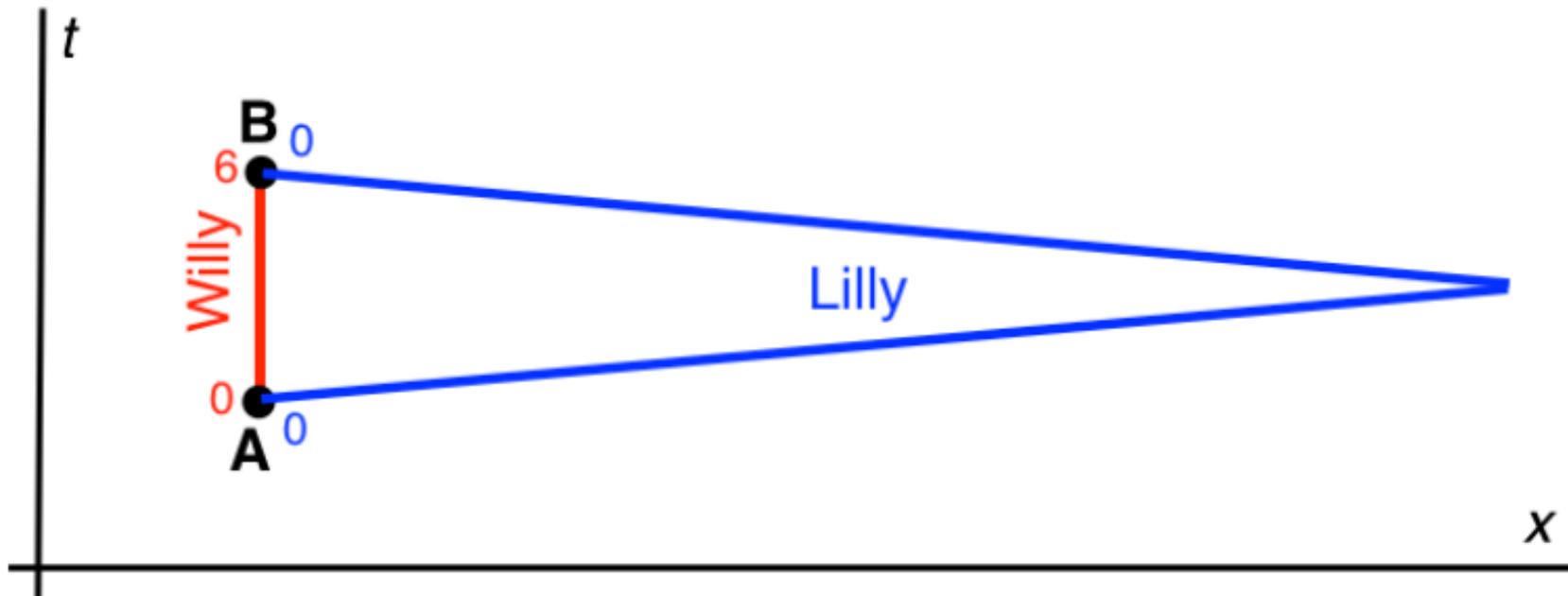


Für diejenige Person (Uhr), die sich gar nicht bewegt, vergeht die meiste Zeit.

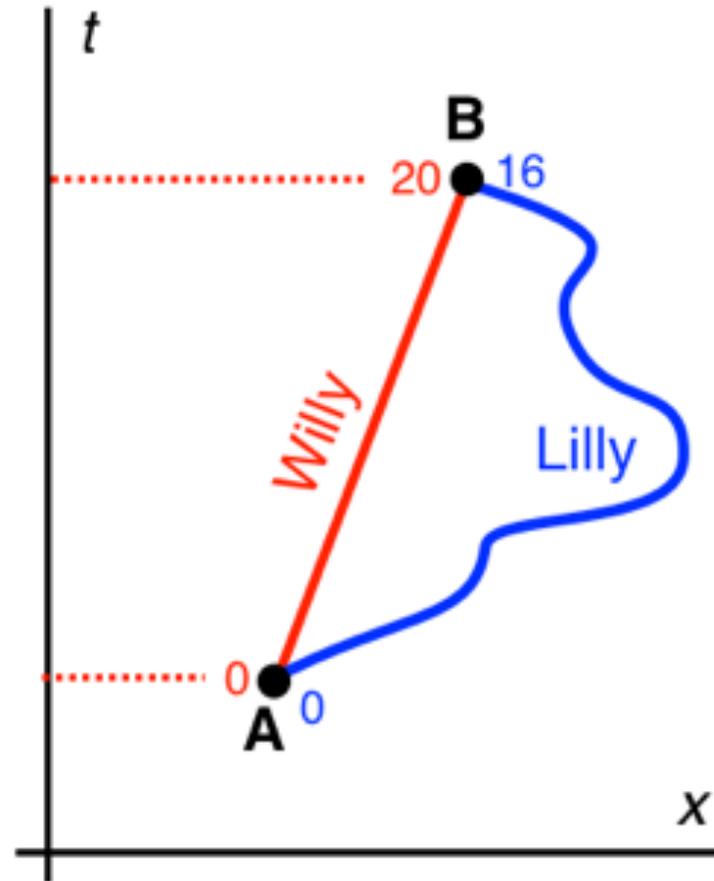
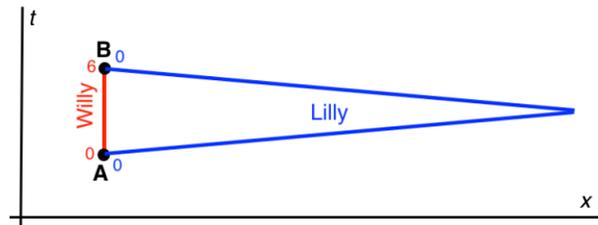
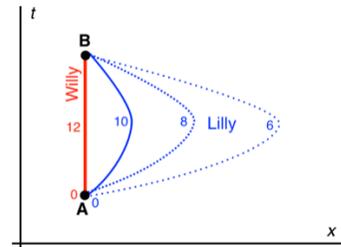
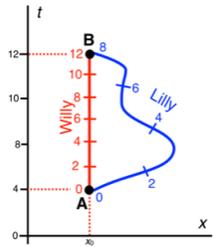
## 8.2 Abstand zwischen zwei Raumzeit-Punkten



Für eine Person (Uhr), die mit (fast) der Grenzgeschwindigkeit von A nach B gelangt, vergeht (fast) keine Zeit.

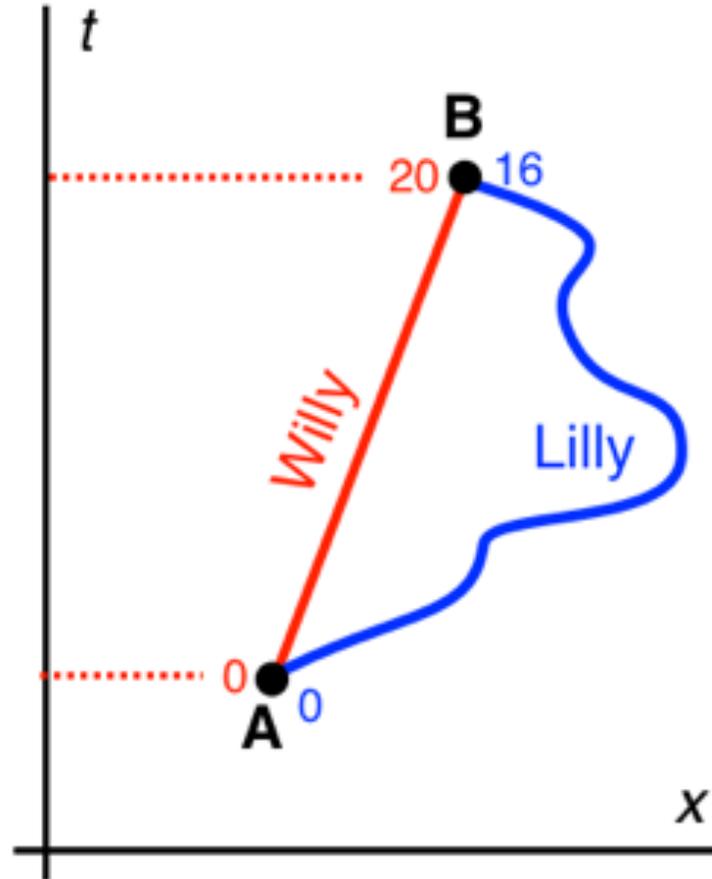
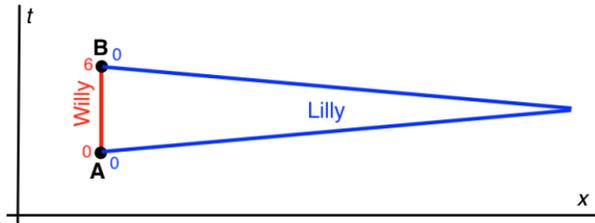
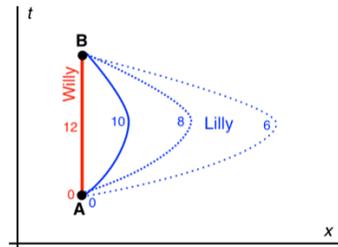
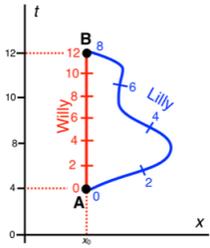


## 8.2 Abstand zwischen zwei Raumzeit-Punkten



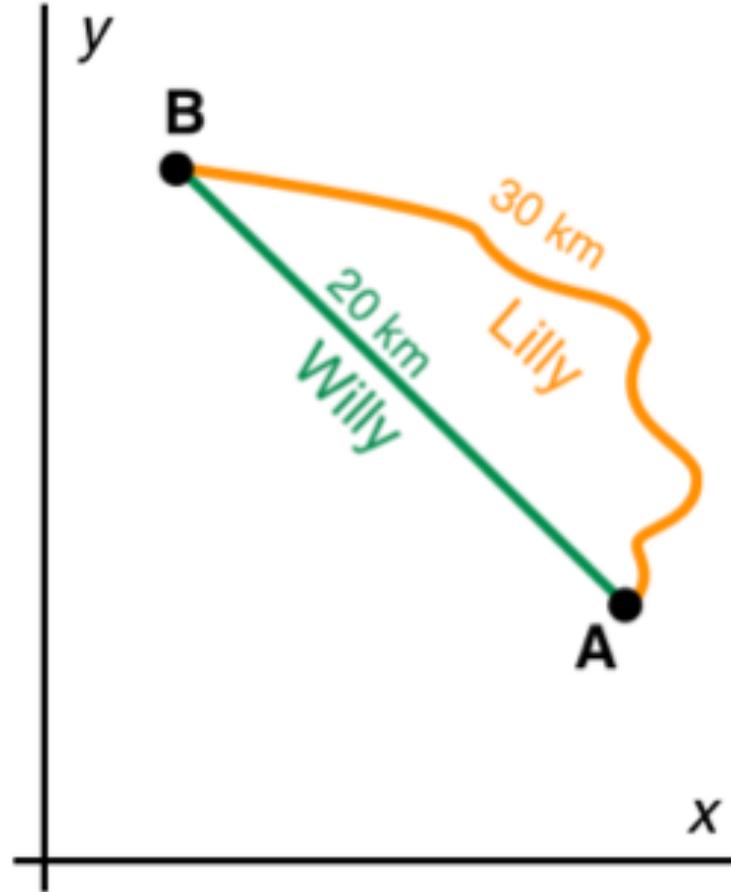
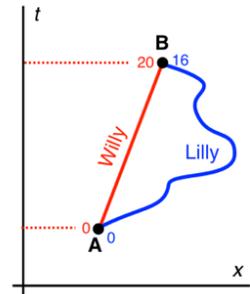
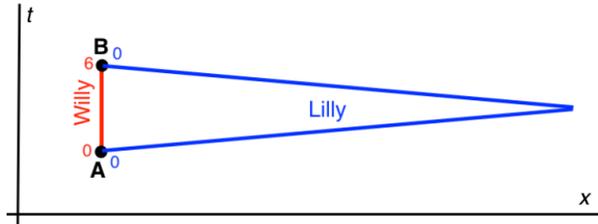
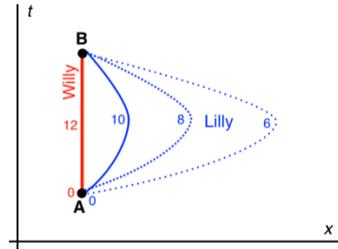
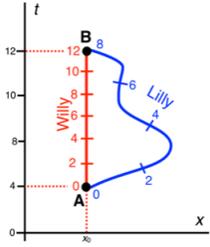
Für diejenige Person (Uhr), die sich frei schwebend bewegt, vergeht die meiste Zeit. Für eine Person (Uhr), die mit (fast) der Grenzggeschwindigkeit von A nach B gelangt, vergeht (fast) gar keine Zeit.

## 8.2 Abstand zwischen zwei Raumzeit-Punkten

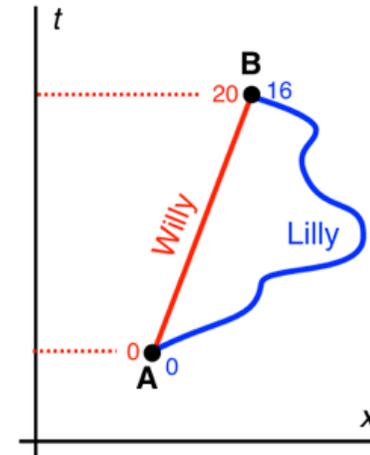
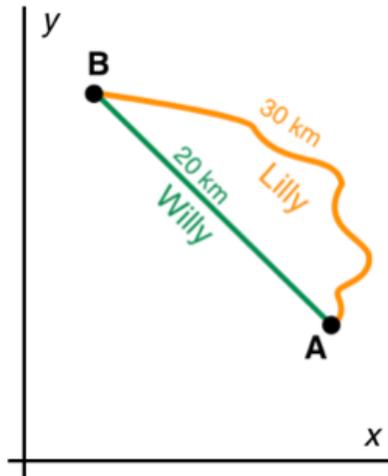


Auf der geraden Weltlinie vergeht die meiste Zeit.

# 8.2 Abstand zwischen zwei Raumzeit-Punkten



## 8.2 Abstand zwischen zwei Raumzeit-Punkten



**normaler Ortsraum**

**Raumzeit**

Ort (Raumpunkt)

Raumzeit-Punkt

Kilometerzähler

Uhr

Bewegung auf einer Gerade:  
kleinste Entfernung

frei schwebende Bewegung:  
größter zeitlicher Abstand

## 8.3 Zeitreisen - das Zwillingsparadoxon

$$T_k = T_g \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v \ll c$$

$$T_k \approx T_g$$

Alltag

$$v \rightarrow c$$

$$T_k \rightarrow 0\text{s}$$

Beschleuniger

$$v = c$$

$$T_k = 0\text{s}$$

Licht

## 8.3 Zeitreisen - das Zwillingsparadoxon

$$T_g - T_k = T_g \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

Beispiel 2: Lilly reist im Auto

$$T_g = 2\text{h} = 7200\text{s} \quad v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$T_g - T_k = 25 \cdot 10^{-12} \text{s}$$

## 8.3 Zeitreisen - das Zwillingsparadoxon

$$T_k = T_g \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Beispiel 2: Lilly reist mit hoher Geschwindigkeit

$$T_g = 20\text{d}$$

$$v = 0,9c$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$T_k = 9\text{d}$$

Zeitreise:

Während Willy um 20 Tage gealtert ist, ist Lilly 9 Tage älter geworden.

## 8.3 Zeitreisen - das Zwillingsparadoxon

Zwei Personen W und L trennen sich (Ereignis A) und treffen sich wieder (Ereignis B). W bewegt sich frei schwebend, L bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  (gleicher Betrag von  $v$  auf Hin- und Rückweg). Wenn dabei für W die Zeit  $T_g$  vergeht, so vergeht für L die Zeit

$$T_k = T_g \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

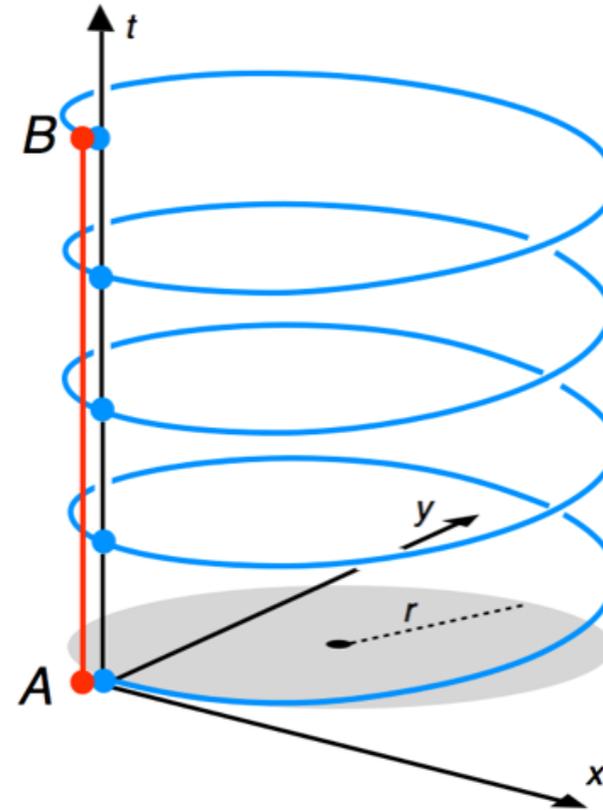
# 8.4 Bewegung auf einer Kreisbahn GPS



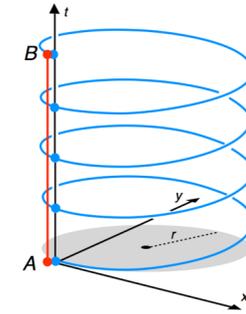
$$T_g = T$$

$$T_k = T_g \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T_g - T_k = T_g \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = T \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 r^2}{c^2 T^2}} \right)$$



## 8.4 Bewegung auf einer Kreisbahn GPS



$$T_g - T_k = T_g \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = T \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 r^2}{c^2 T^2}} \right)$$

$$= 4 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

$$T = 5 \text{ s}$$

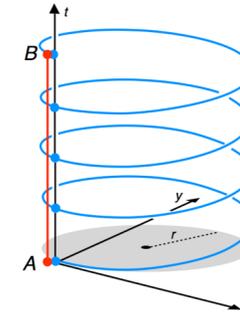
$$r = 3 \text{ m}$$

Effekt bemerkbar

- wenn Maßgenauigkeit sehr hoch ist.
- wenn Geschwindigkeit sehr hoch ist

# 8.4 Bewegung auf einer Kreisbahn GPS

## Beispiel GPS



$$T_g - T_k = T_g \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = T \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 r^2}{c^2 T^2}} \right)$$

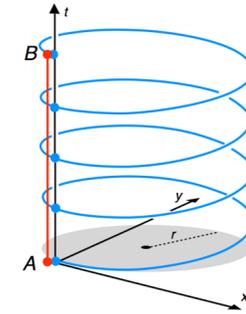
$$= 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$T = 12\text{h} = 43\,200 \text{ s}$$

$$r = 26\,600\,000 \text{ m}$$

# 8.4 Bewegung auf einer Kreisbahn GPS

## Beispiel Myonenbeschleuniger



$$T_g = \frac{T_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$= 69,6 \mu s$$

$$T = \tau = 2,2 \mu s$$
$$v = 0,9995 c$$

Für die Laboruhr ist 32 mal so viel Zeit vergangen, wie für die „Uhr des Myons“.

## 8.5 Der Raumzeit-Abstand

Größen, die bei Bezugssystem Ihre Werte ändern

- Energie
- Impuls
- ....

Größen, die bei Bezugssystem Ihre Werte **nicht** ändern

- Ladung
- Entropie
- ....

räumliche und zeitliche Abstände?

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}$$

## 8.5 Der Raumzeit-Abstand

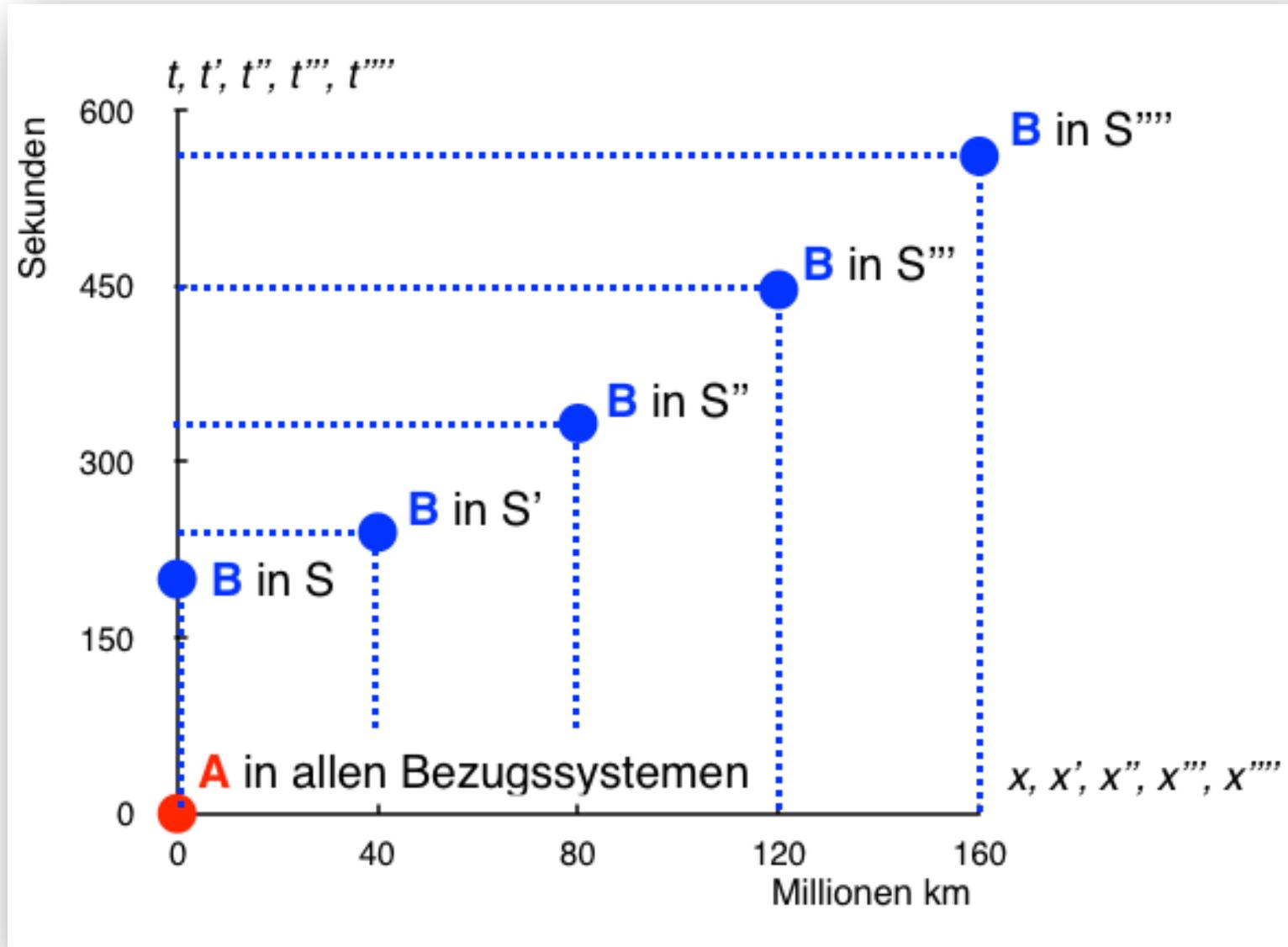
Die Werte von räumlichen Abständen und Zeitintervallen hängen vom Bezugssystem ab. Der Raumzeit-Abstand

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}$$

ist unabhängig vom Bezugssystem.

## 8.5 Der Raumzeit-Abstand

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}$$



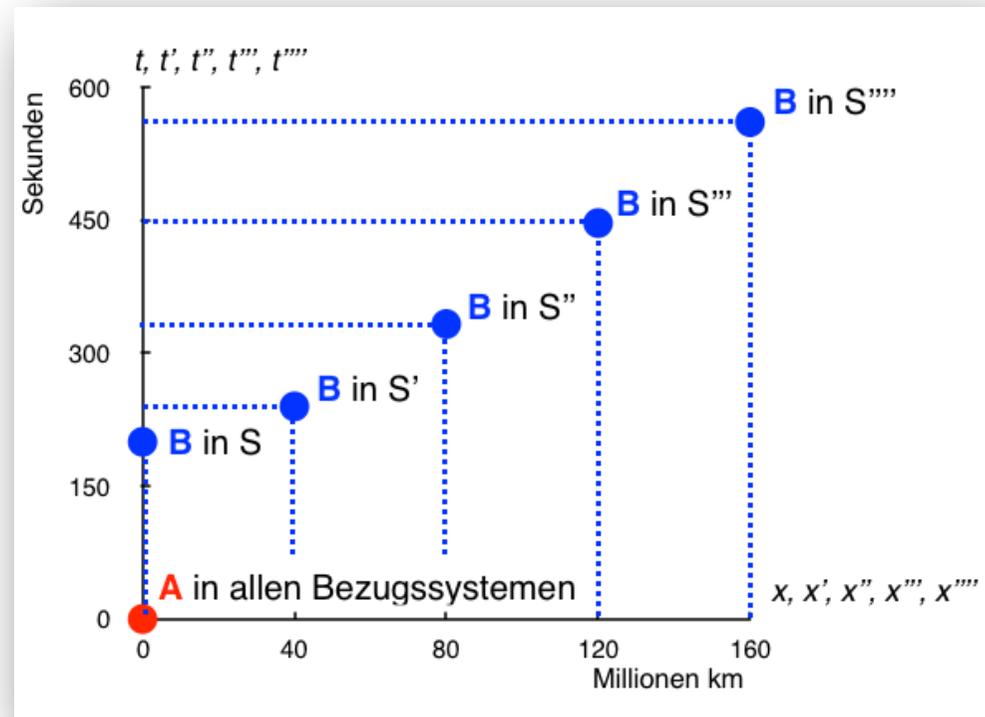
## 8.5 Der Raumzeit-Abstand

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}$$

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2} = \sqrt{c^2 \Delta t^2} = c \Delta t = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 200 \text{ s} = 60 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$\Delta x = 0$$

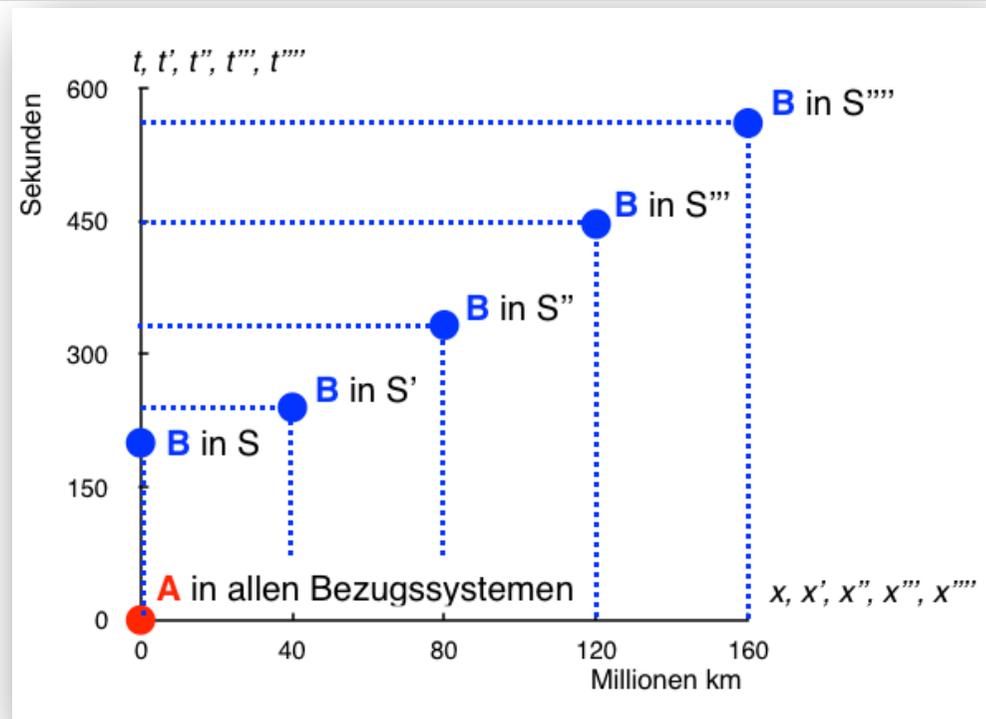
$$\Delta t = 200 \text{ s}$$



Bezugs-system	räumlicher Abstand	zeitlicher Abstand	Raumzeit-Abstand	Geschwindigkeit relativ zu S
S	0	200 s	$60 \cdot 10^9$ m	$0 \text{ m/s} = 0 c$
S'	$40 \cdot 10^9$ m	240 s	$60 \cdot 10^9$ m	$1,67 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 0,56 c$
S''	$80 \cdot 10^9$ m	333 s	$60 \cdot 10^9$ m	$2,40 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 0,8 c$
S'''	$120 \cdot 10^9$ m	447 s	$60 \cdot 10^9$ m	$2,68 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 0,89 c$
S''''	$160 \cdot 10^9$ m	571 s	$60 \cdot 10^9$ m	$2,85 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 0,95 c$

$$\Delta x = 0$$

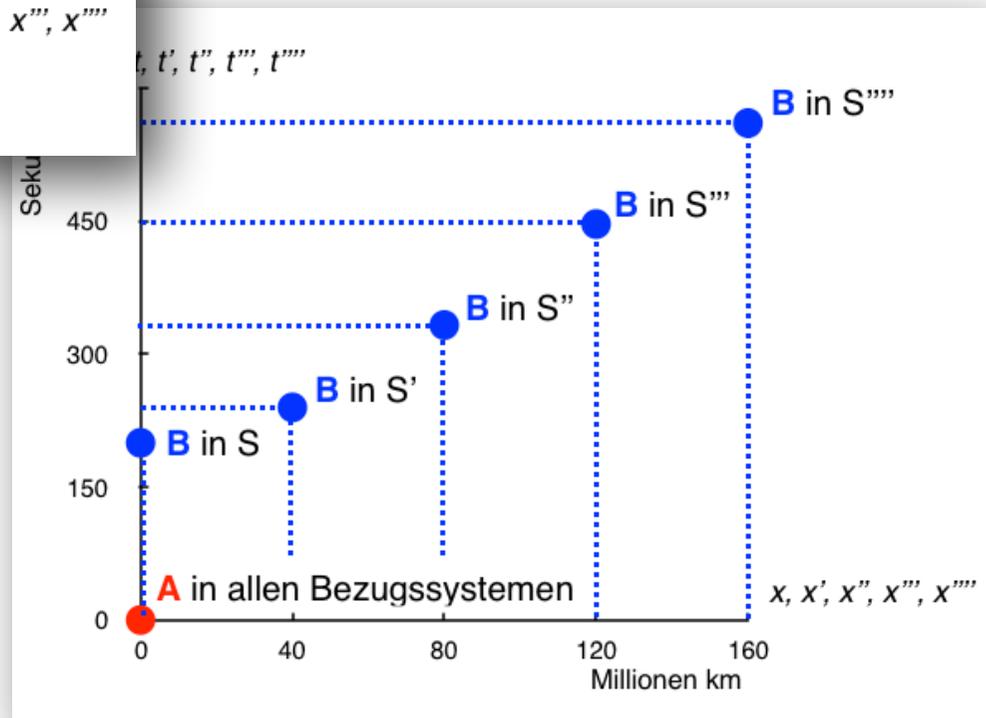
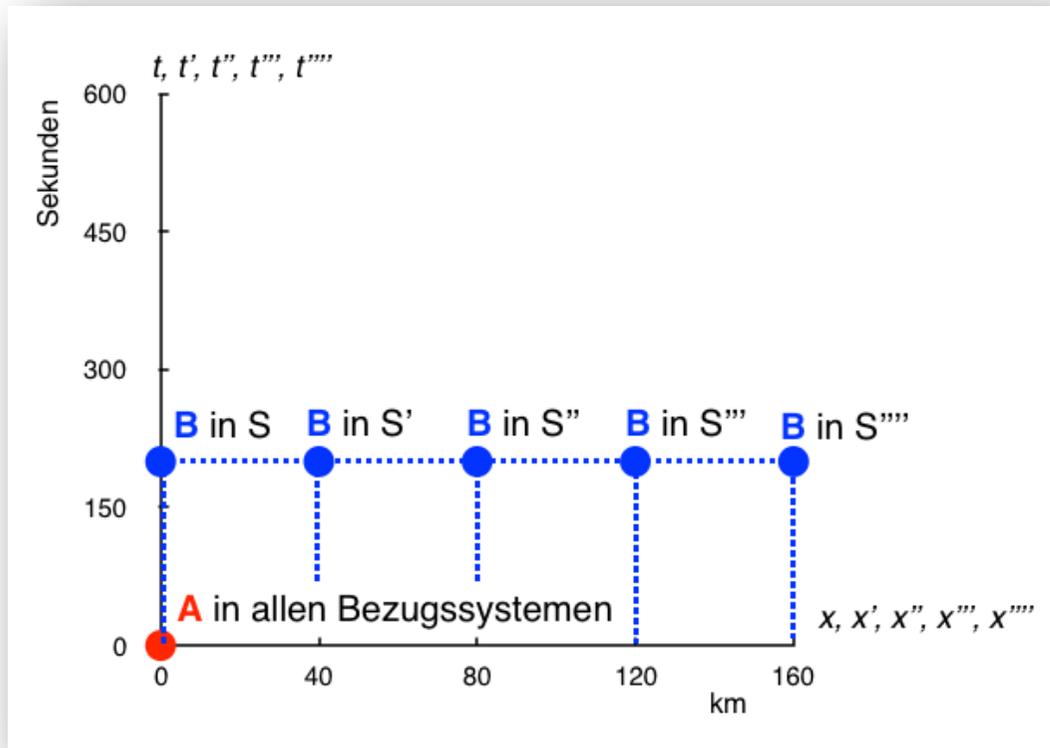
$$\Delta t = 200 \text{ s}$$



# 8.5 Der Raumzeit-Abstand

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}$$

$$= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 200\text{s} = 60 \cdot 10^9 \text{ m}$$



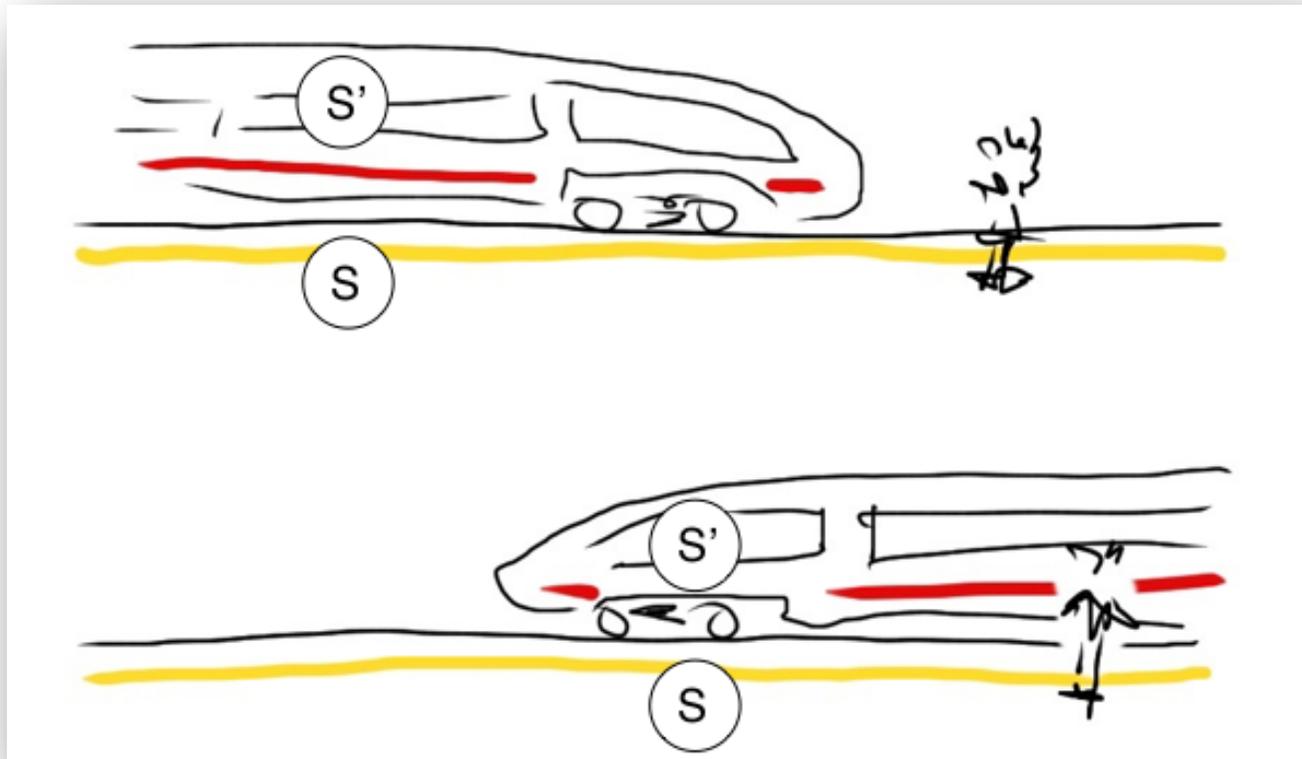
$$\Delta x = 0$$

$$\Delta t = 200\text{s}$$

## 8.6 Längen und Zeitdauer bei Bezugssystemwechsel

In diesem Kapitel werden folgende Fragen beantwortet:

- Wie ändert sich die Länge  $L$  eines Gegenstandes bei Bezugssystemwechsel?
- Wie ändert sich die Dauer  $T$  eines Vorgangs bei Bezugssystemwechsel?

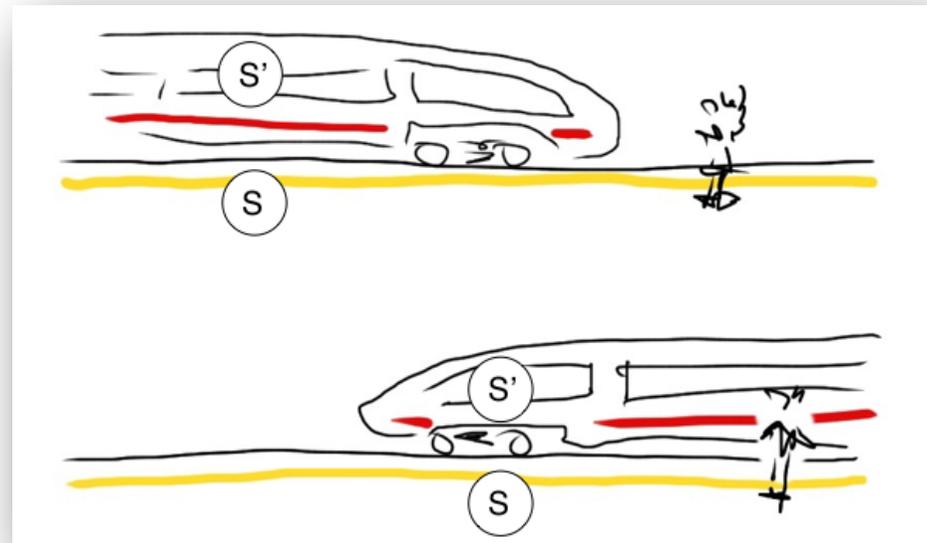


## 8.6 Längen und Zeitdauer bei Bezugssystemwechsel

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$\Delta x = 0 \quad \Delta x' = L_0$$

$$\Delta t = L/v \quad \Delta t' = L_0/v$$



A: Zuganfang fährt bei Willy vorbei.

B: Zugende fährt bei Willy vorbei.

$$\Delta x = 0 \quad \Delta x' = vT$$

$$\Delta t = T_0 \quad \Delta t' = T$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## 8.6 Längen und Zeitdauer bei Bezugssystemwechsel

Die Länge eines Gegenstandes ist bezugssystemabhängig:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$L_0$  = Eigenlänge, Länge im Bezugssystem, in dem der Körper ruht

$L$  = Länge im Bezugssystem, das sich gegen den Körper mit  $v$  bewegt.

Die Dauer eines Vorgangs ist bezugssystemabhängig:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$T_0$  = Eigenzeit, Zeitdauer in Bezugssystem, in dem die Uhr ruht

$T$  = Zeit in Bezugssystem, die mit  $v$  bewegte Uhr anzeigt.

## 8.7 Die Gleichzeitigkeit ist nicht mehr was sie einmal war

Ereignis A: Springen des Zeigers am Hauptbahnhof Karlsruhe

Ereignis B: Springen des Zeigers am Hauptbahnhof Mannheim

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

Willy steht am Bahnsteig:  $\Delta t = 0$        $-\Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$

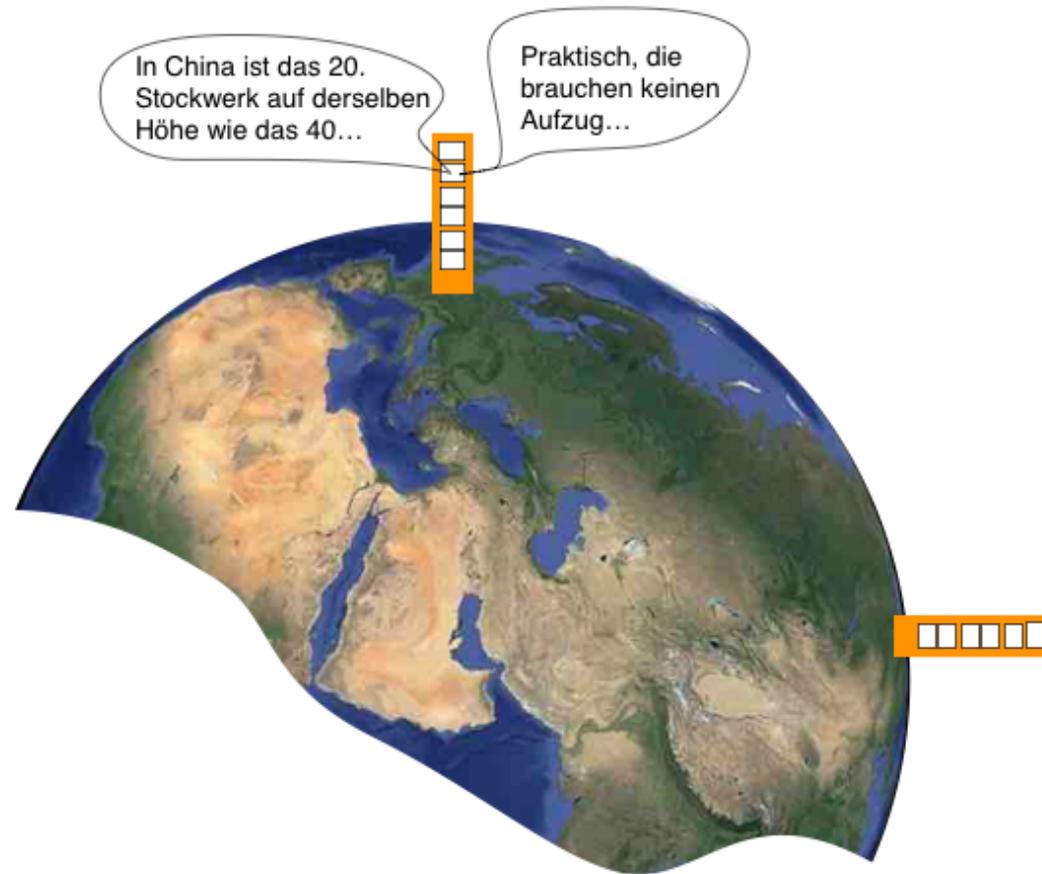
$\Delta x$     $\Delta x'$    Abstand der Bahnhöfe ein S und S'

$\Delta x' \neq \Delta x$        $\Delta t' \neq 0$

Zwei Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig sind, sind es nicht in einem anderen.

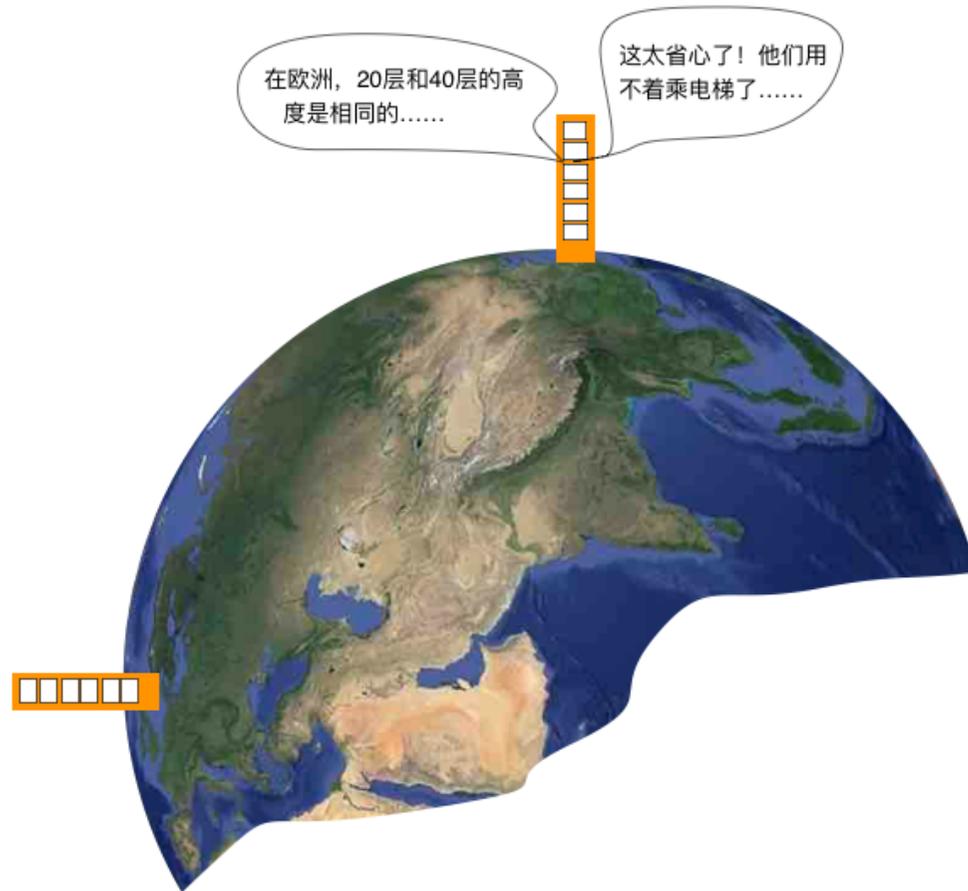
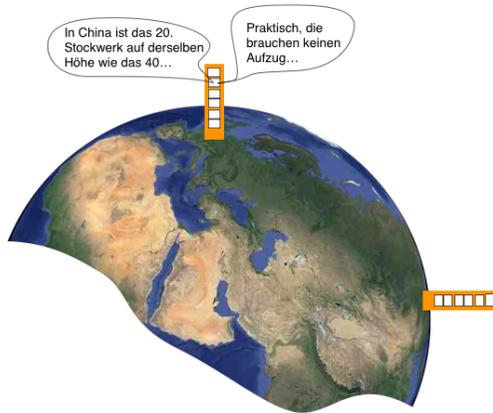
## 8.7 Die Gleichzeitigkeit ist nicht mehr was sie einmal war

Zwei Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig sind, sind es nicht in einem anderen.



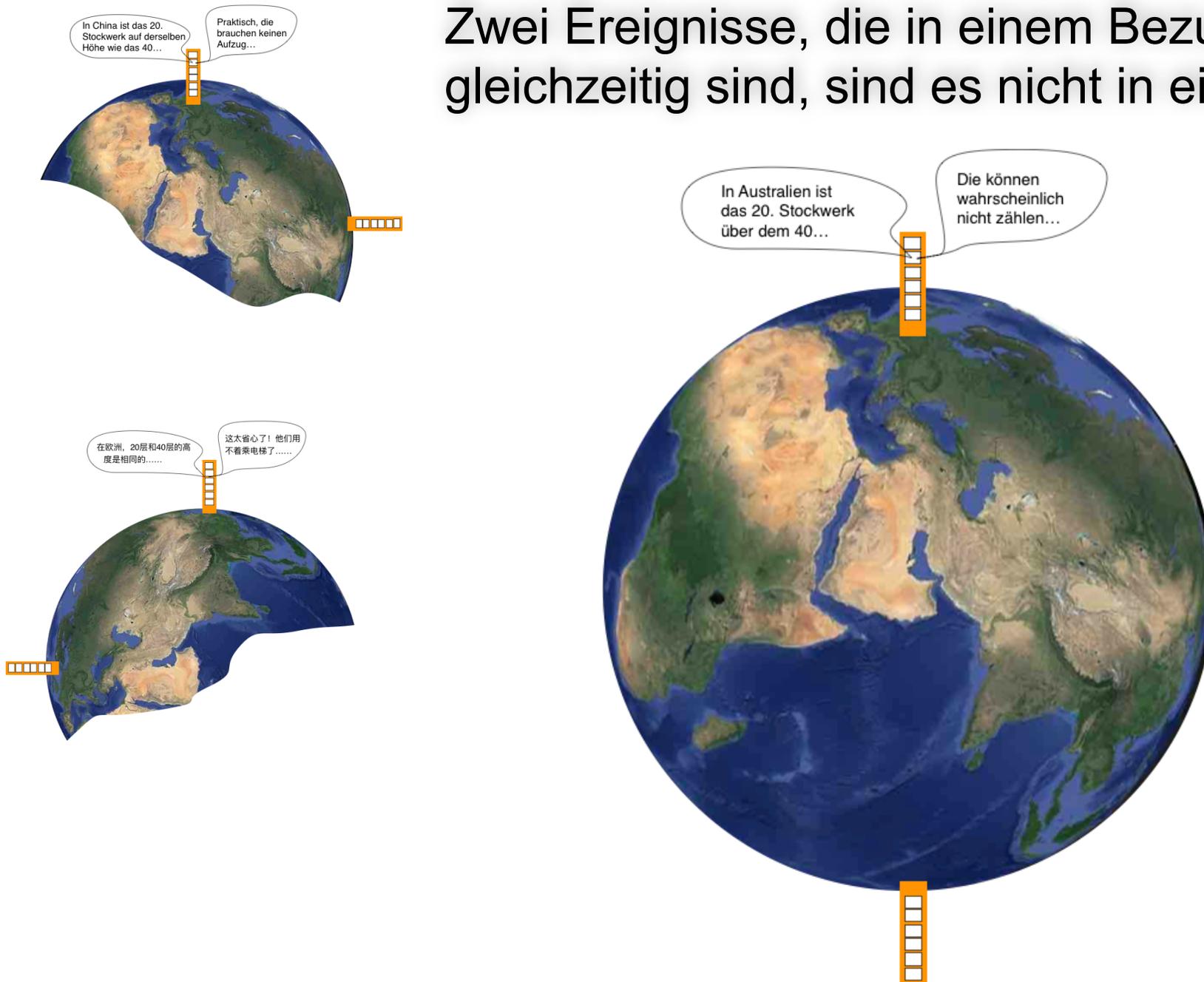
## 8.7 Die Gleichzeitigkeit ist nicht mehr was sie einmal war

Zwei Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig sind, sind es nicht in einem anderen.



# 8.7 Die Gleichzeitigkeit ist nicht mehr was sie einmal war

Zwei Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig sind, sind es nicht in einem anderen.



## 8.8 Noch einmal Grenzgeschwindigkeit

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2} \quad \text{falls} \quad c^2 \Delta t^2 > \Delta x^2$$

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2} \quad \text{falls} \quad c^2 \Delta t^2 < \Delta x^2$$

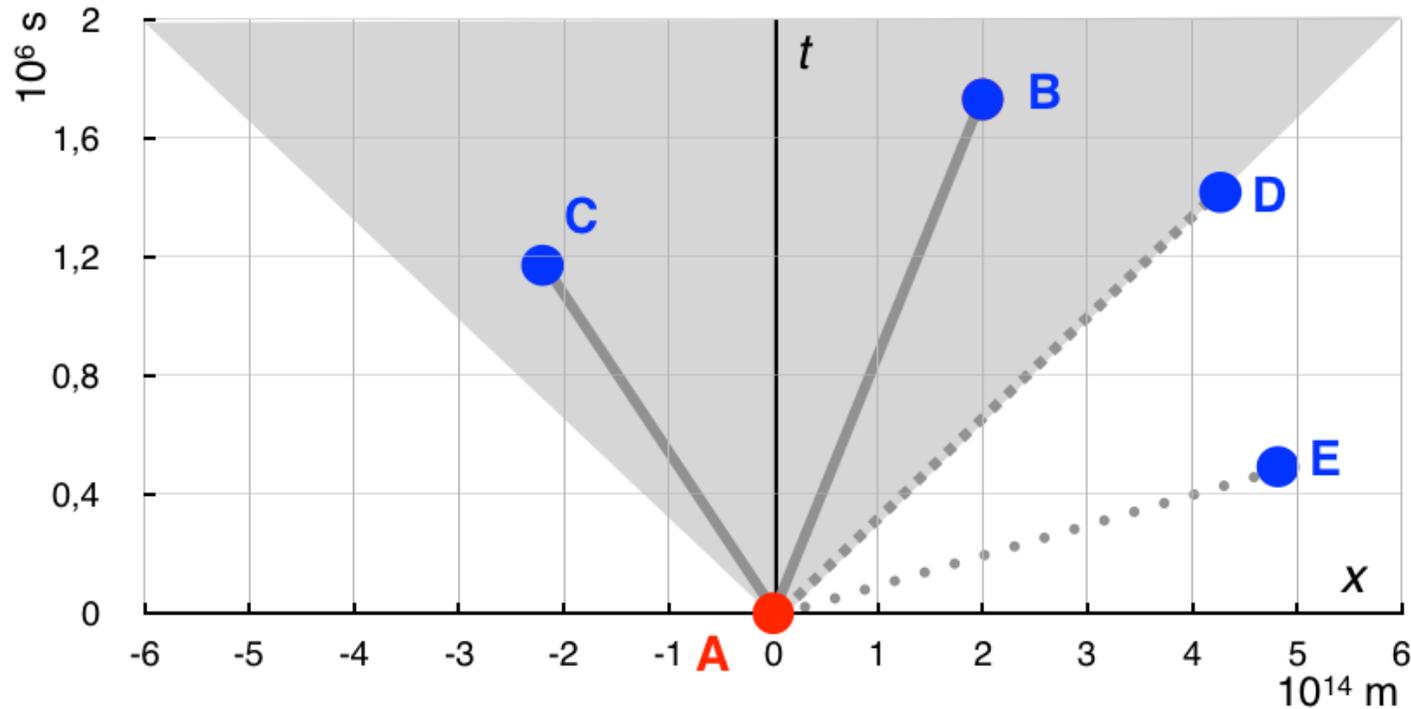
$$\Delta s = 0 \quad \text{falls} \quad c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2} = \sqrt{c^2 - v^2} \Delta t$$

$$v \leq c \quad v = c : \Delta s = 0$$

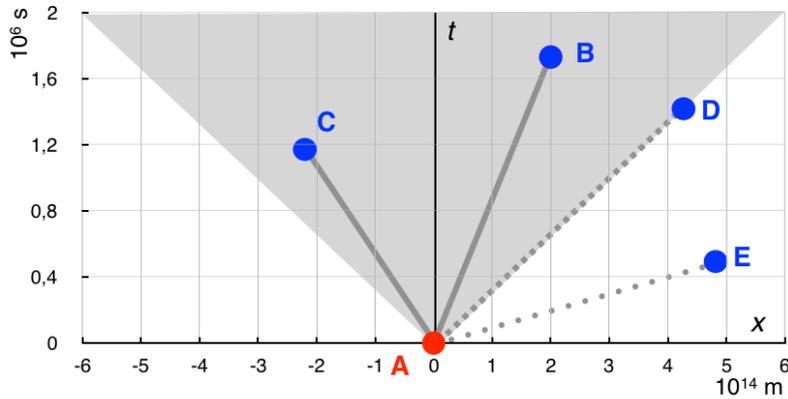
## 8.8 Noch einmal Grenzgeschwindigkeit

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}$$



Welche der Ereignisse **B**, **C**, **D**, **E** können mit dem Ereignis **A** kausal verbunden sein?

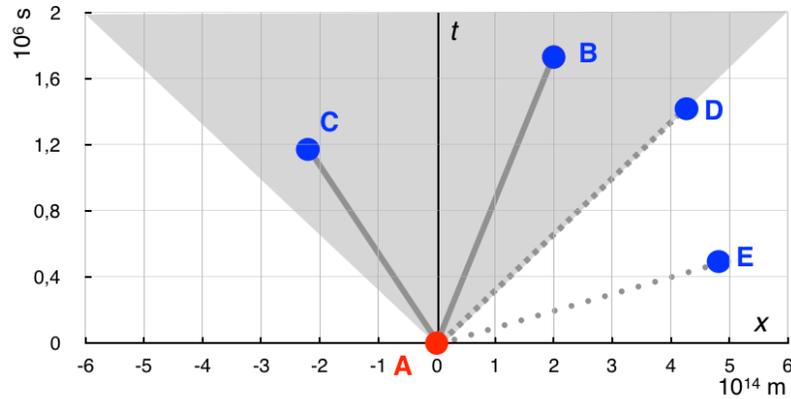
## 8.8 Noch einmal Grenzgeschwindigkeit



Welche der Ereignisse **B**, **C**, **D**, **E** können mit dem Ereignis **A** kausal verbunden sein?

Raumzeit-Puntepaar	$c^2\Delta t^2 \approx \Delta x^2$	Reise möglich?	Geschwindigkeit
A → B	$c^2\Delta t^2 > \Delta x^2$	ja	$0,4c$
A → C	$c^2\Delta t^2 > \Delta x^2$	ja	$-0,6c$
A → D	$c^2\Delta t^2 = \Delta x^2$	ja	$c$
A → E	$c^2\Delta t^2 < \Delta x^2$	nein	$(3,2c)$

## 8.8 Noch einmal Grenzgeschwindigkeit



Welche der Ereignisse **B**, **C**, **D**, **E** können mit dem Ereignis **A** kausal verbunden sein?

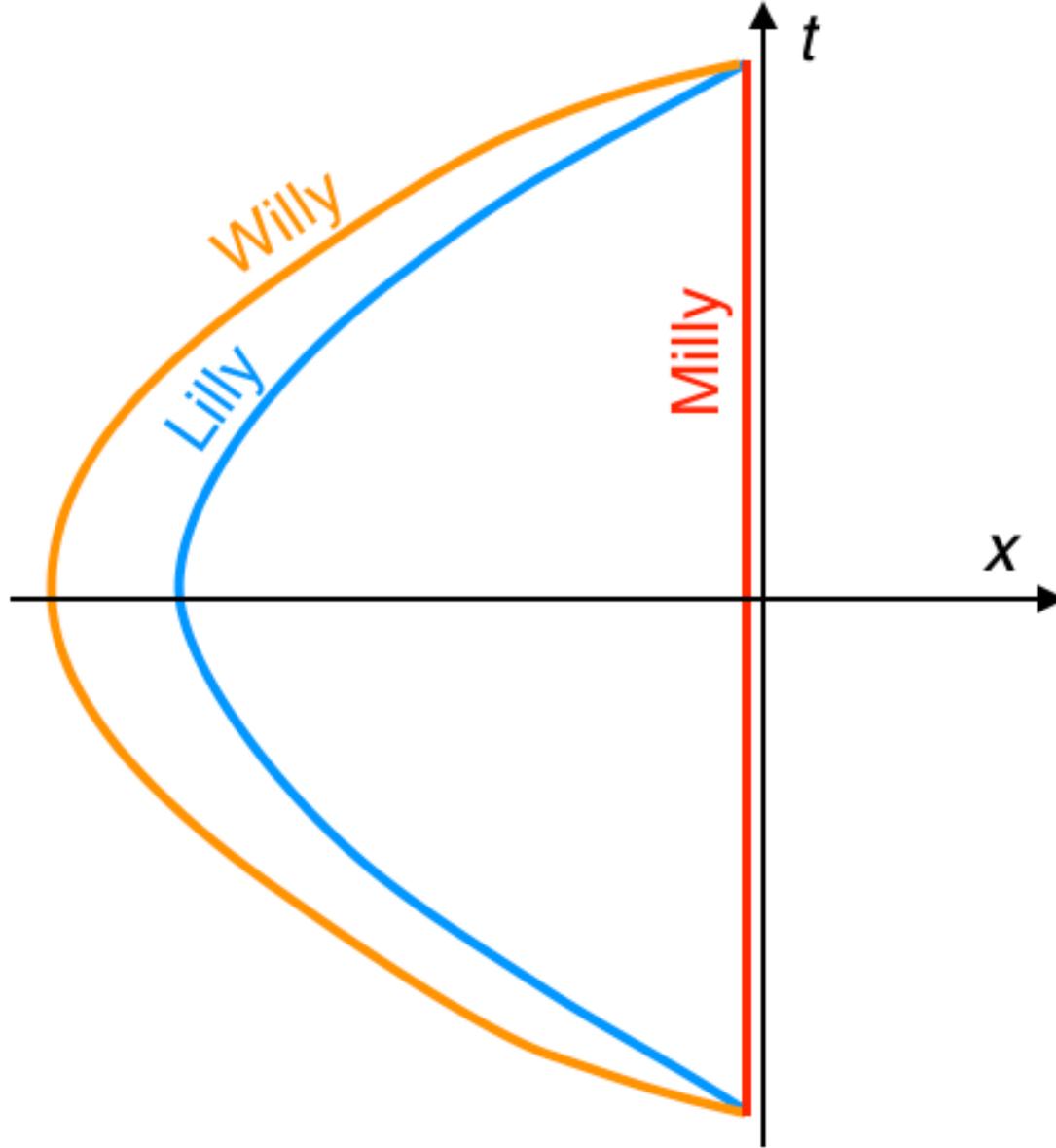
$c$  ist die Grenzgeschwindigkeit.

Zwei Ereignisse sind nur dann kausal verbunden, wenn

$$c^2 \Delta t^2 \geq \Delta x^2$$

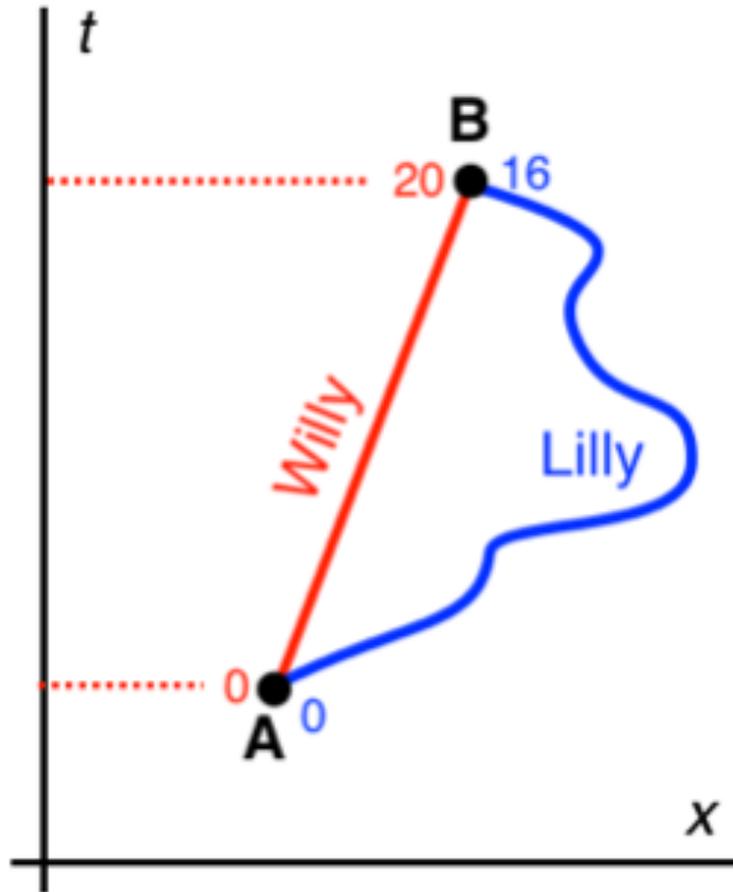
ist.

## 8.9 GPS-Korrektur aus anderer Perspektive



## 8.10 Rückblick auf Intervalle

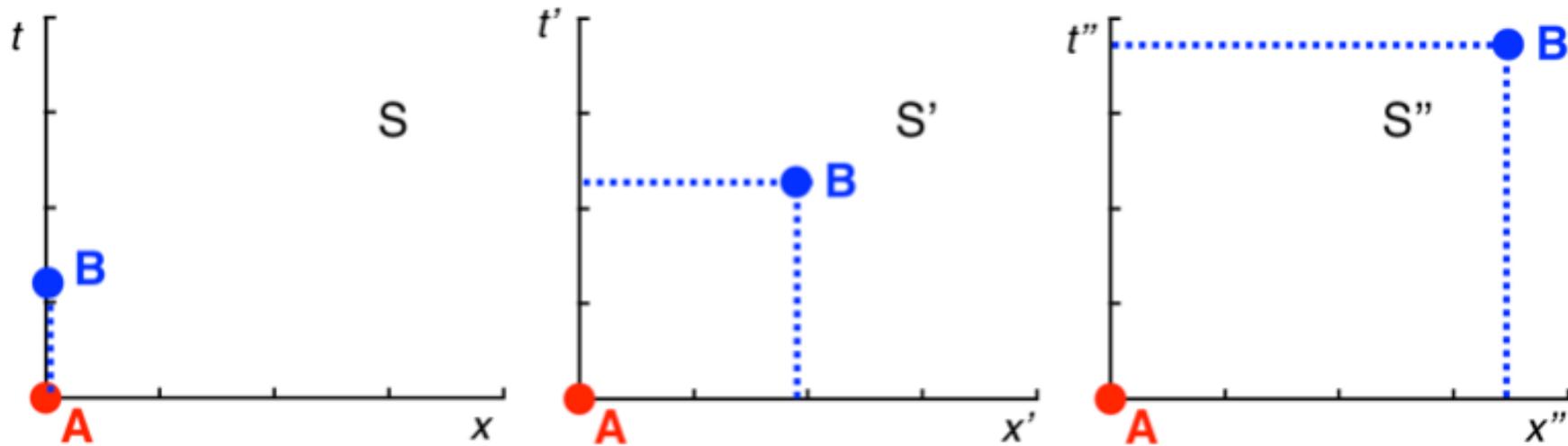
### 1. Zwei Raumzeitpunkte, zwei verschiedene Weltlinien



$$T_k = T_g \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

## 8.10 Rückblick auf Intervalle

1. Zwei Raumzeitpunkte, zwei verschiedene Weltlinien
2. Zwei Raumzeitpunkte, zwei verschiedene Bezugssysteme



$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

## 8.10 Rückblick auf Intervalle

1. Zwei Raumzeitpunkte, zwei verschiedene Weltlinien
2. Zwei Raumzeitpunkte, zwei verschiedene Bezugssysteme
3. Länge eines Gegenstandes und Dauer eines Vorgangs in verschiedenen Bezugssystemen

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## 8.10 Rückblick auf Intervalle

1. Zwei Raumzeitpunkte, zwei verschiedene Weltlinien

$$T_k = T_g \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

2. Zwei Raumzeitpunkte, zwei verschiedene Bezugssysteme

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

3. Länge eines Gegenstandes und Dauer eines Vorgangs in verschiedenen Bezugssystemen

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$