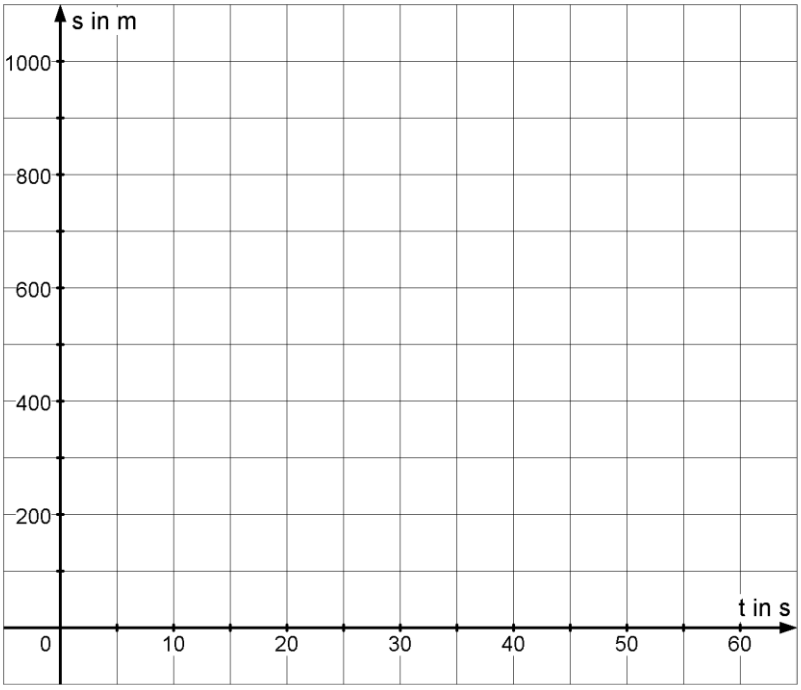
1) Ein Dieb ist 720 m von einer Polizeistation entfernt. Er läuft mit der Geschwindigkeit $v_D = 4\,\frac{m}{s}$ weg. Ein Polizist, der 560 m von der Station (in derselben Richtung) entfernt ist, läuft dem Dieb mit der Geschwindigkeit $v_P = 8\,\frac{m}{s}$ nach, während gleichzeitig von der Station ein Wagen mit der Geschwindigkeit $v_W = 72\,\frac{km}{h}$ die Verfolgung aufnimmt.

a) Stelle die 3 s(t)-Formeln auf und zeichne sie mit 3 verschiedenen Farben in das Koordinatensystem.

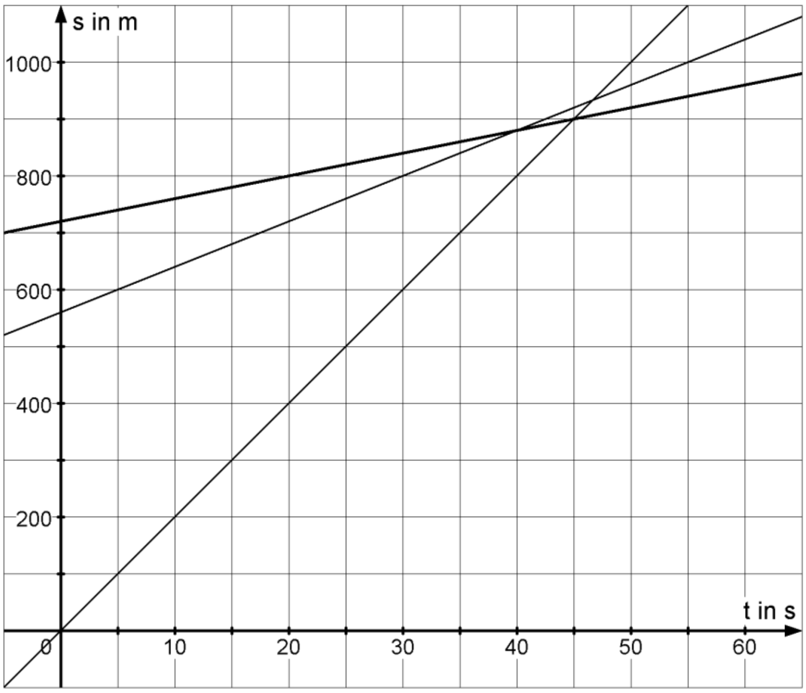


Lies daran ab, wer den Dieb zuerst erreicht.

Lösung:

$$s_{Dieb}(t) = 4\tfrac{m}{s}\cdot t + 720m$$
$$s_{Polizist}(t) = 8\tfrac{m}{s}\cdot t + 560m$$
$$s_{Wagen}(t) = 20\tfrac{m}{s}\cdot t$$

Der Polizist erreicht den Dieb zuerst.

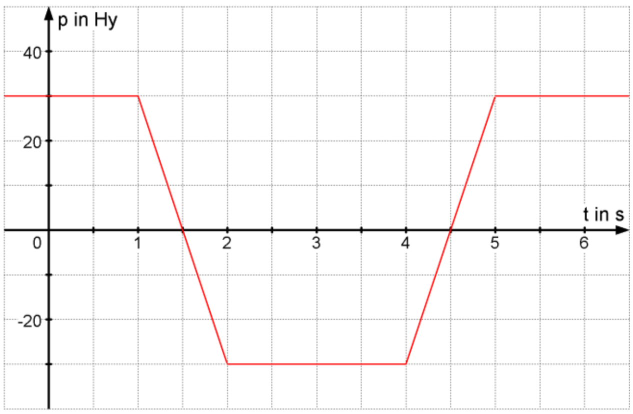


b) Berechne wann der Dieb eingeholt wird.

Lösung:

$$4\tfrac{m}{s}\cdot t + 720m = 8\tfrac{m}{s}\cdot t + 560m$$
$$4\tfrac{m}{s}\cdot t = 160m \,|: 4\tfrac{m}{s}$$
$$t = 40s$$

2) Beschreibe anhand des gegebenen p-t-Diagramms den Bewegungsablauf des betreffenden Körpers (m=5 kg) und gib jeweils die Zahlenwerte von v und a an.



Lösung:

Bis zum Zeitpunkt t = 1 s bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit $v = \frac{p}{m} = \frac{30Hy}{5kg} = 6\,\frac{m}{s}$ *nach rechts. Von 1 s bis 1,5 s gibt er seinen Impuls p ab; von 1,5 s bis 2 s gibt er noch mal den Impuls p ab (Von 1s bis 2 s gibt er den doppelten Impuls ab), d.h. es fließt ein Impulsstrom* $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-60Hy}{1s} = -60N$ *aus dem Körper heraus bzw. er erfährt eine Bremsverzögerung/ negative Beschleunigung* $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-12\,\frac{m}{s}}{1s} = -12\,\frac{m}{s^2}$. *Dadurch hat er jetzt negativen Impuls bzw. bewegt er sich mit konstanter Geschwindigkeit nach links und hat dabei betragsmäßig die selbe Geschwindigkeit wie vorher:* $v = -6\,\frac{m}{s}$. *Zwischen der 4. und der 5. Sekunde wiederholt sich der Vorgang umgekehrt, d.h. es fließt ein Impulsstrom der Stärke* $F = \frac{60Hy}{1s} = 60N$ *in ihn hinein bzw. er erfährt eine positive Beschleunigung von* $a = 12\,\frac{m}{s^2}$. *Dadurch hat er ab der 5. Sekunde wieder positiven Impuls bzw. bewegt sich wieder nach rechts mit der Geschwindigkeit* $v = 6\,\frac{m}{s}$.

3) Ein Basketballspieler, der im Koordinatenursprung steht, wirft in 2 m Höhe den Basketball mit $v_0 = 7{,}3\,\frac{m}{s}$ unter einem Winkel von 60° in Richtung Korb ab. Die Entfernung des Korbes vom Werfer beträgt in x-Richtung 4m.

a) Berechne die Komponenten von $\vec{v}_0$. Stelle die Gleichungen in vektorieller Form auf für: $\vec{a}(t), \vec{v}(t)$ *und* $\vec{s}(t)$.

Lösung:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0\,\frac{m}{s^2} \\ -9{,}81\,\frac{m}{s^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \vec{a}\cdot t + \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ -g\cdot t + v_{y0} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0\cdot\cos(\alpha) \\ v_0\cdot\sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}3\,\frac{m}{s}\cdot\cos(60^o) \\ 7{,}3\,\frac{m}{s}\cdot\sin(60^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}65\,\frac{m}{s} \\ 6{,}32\,\frac{m}{s} \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\vec{a}\cdot t^2 + \vec{v}_0\cdot t + \vec{s}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0}\cdot t \\ -\tfrac{1}{2}g\cdot t^2 + v_{y0}\cdot t + s_{y0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}65\,\frac{m}{s}\cdot t \\ -\tfrac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2 + 6{,}32\,\frac{m}{s}\cdot t + 2m \end{pmatrix}$$

b) Berechne, ob der Ball den Korb trifft, der in 3,05m Höhe montiert ist. Berechne außerdem die maximale Höhe h des Balls auf seinem Weg vom Werfer zum Korb.

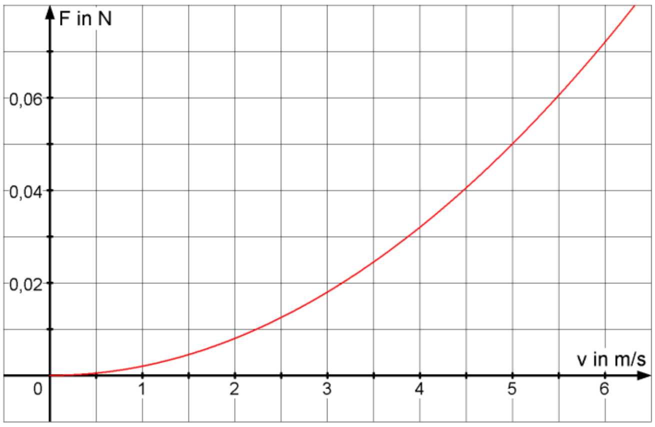
Lösung:

$$v_y(t_1) = -g \cdot t_1 + v_{y0} = 0\,\tfrac{m}{s} \quad \Rightarrow t_1 = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{6{,}32\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}644s \Rightarrow h = s_y(t_1) = \tfrac{1}{2}gt_1^2 + v_{y0}t_1 + s_{y0} = 4{,}04m$$

$$Oder: \tfrac{1}{2}mv_{y0}^2 + mg \cdot 2m = mgh \quad \Rightarrow h = \frac{v_{y0}^2}{2g} + 2m = 4{,}04m \qquad er\ trifft\ den\ Korb$$

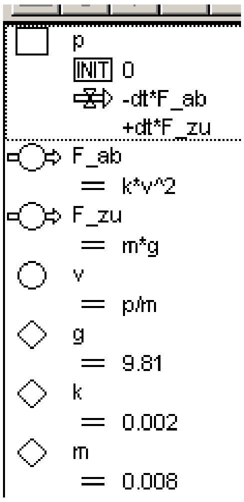
$$s_x(t_2) = v_{x0} \cdot t_2 = 4m \quad \Rightarrow t_2 = \frac{4m}{3{,}65\,\frac{m}{s}} = 1{,}096s \qquad s_y(t_2) = -\tfrac{1}{2}gt_2^2 + v_{y0}t_2 + s_{y0} = 3{,}04m$$

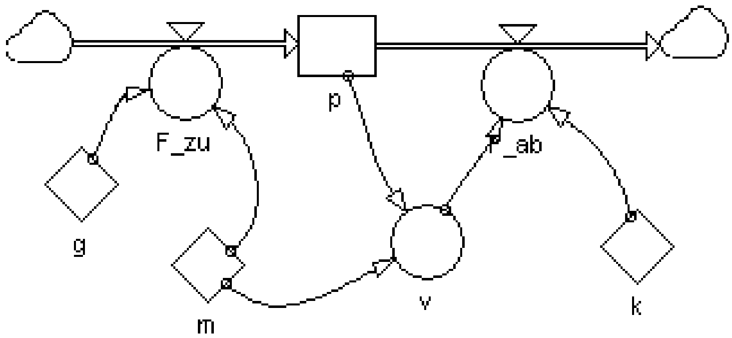
4a) Formuliere ein POWERSIM-Modell
(Skizze und Gleichungen sowie Werte)
für das Fallen einer Kugel (d = 10 cm)
mit Luftreibung.



Lösung:

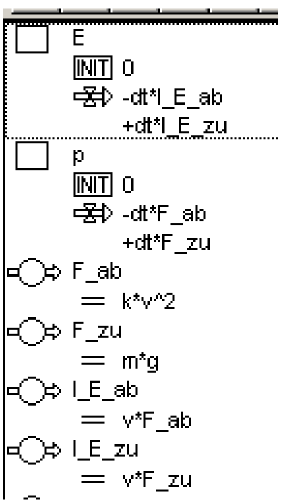
$$k = \frac{F}{v^2} = \frac{0{,}05N}{(5\,\frac{m}{s})^2} = 0{,}002\,\tfrac{kg}{m}\ aus\ Diagramm$$

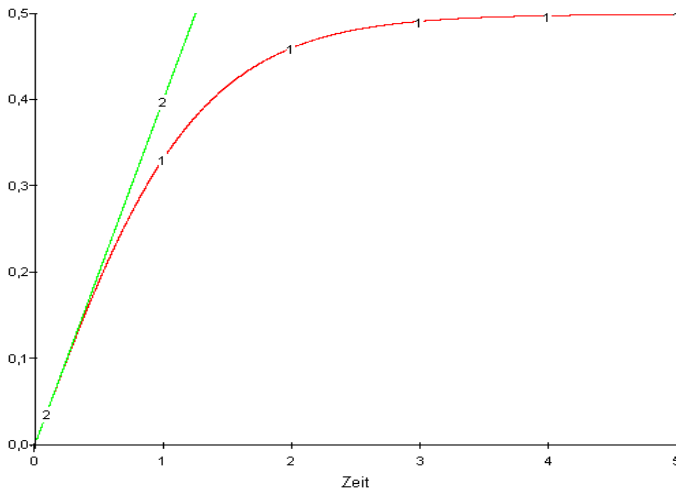


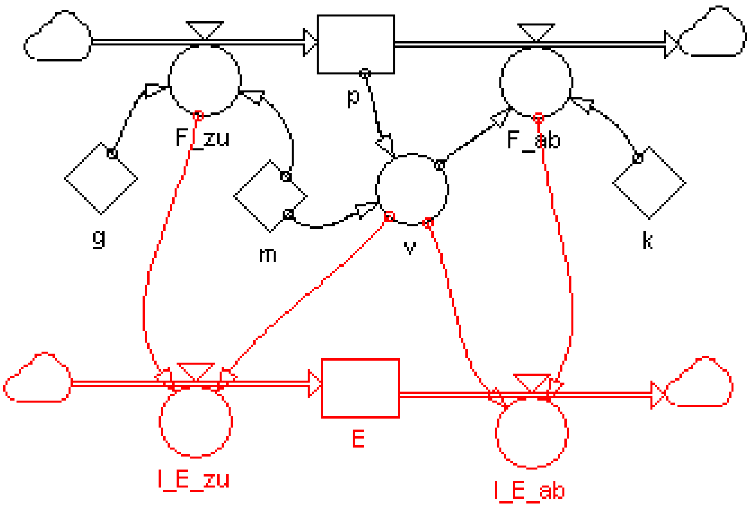


b) Ergänze im Modell mit einer anderen Farbe die Energie der fallenden Kugel. Ergänze auch die zugehörigen Gleichungen und Werte.

Lösung:

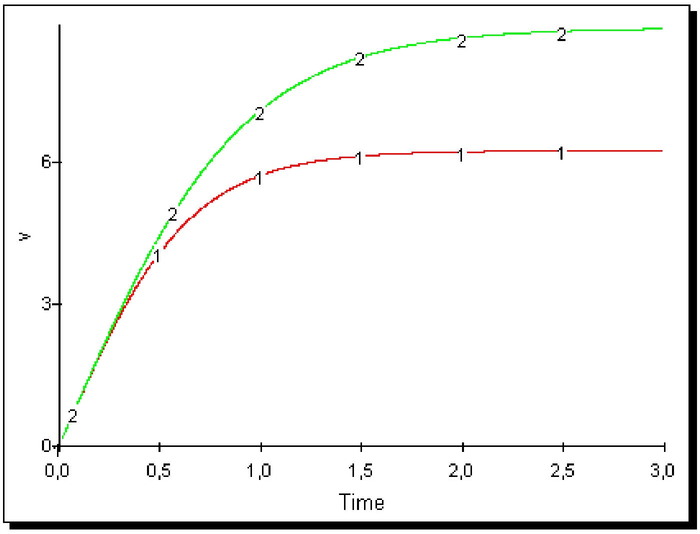






c) Skizziere die zu erwartenden Diagramme und erkläre, warum die skizzierten Veränderungen zu erwarten sind, wenn eine andere Kugel aus dem gleichen Material und größerem Durchmesser verwendet wird.

Lösung:



Größerer Radius r_2 bedeutet grössere Fläche A_2 und damit größeres k_2. Es gilt einerseits:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot c_W \cdot \pi \cdot r_2^2}{\frac{1}{2}\cdot c_W \cdot \pi \cdot r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 .$$

Größerer Radius r_2 bedeutet aber auch größeres Volumen V_2 und damit auch größere Masse m_2. Andererseits gilt daher:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\cdot \pi \cdot r_2^3}{\rho \cdot \frac{4}{3}\cdot \pi \cdot r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

. Deshalb ist die Zunahme der Masse stärker als die Zunahme des k-Wertes. Daher nimmt auch die Stärke des zufließenden Impulsstromes F_zu stärker zu als die Stärke des abfließenden Impulsstromes F_ab bei Vergrößerung der Kugel. Deshalb erreicht die Kugel$_2$ eine höhere Endgeschwindigkeit v_2 zu einem späteren Zeitpunkt t_2:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{g \cdot m_2}{k_2} : \frac{g \cdot m_1}{k_1}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} : \frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 : \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} .$$

Die Zeit bis zum Erreichen der konstanten Endgeschwindigkeit ist fast proportional zur Fallhöhe h.

Es gilt: $\frac{1}{2}\cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g}$. *Daher gilt:* $\frac{h_2}{h_1} = \frac{v_2^2}{2g}\cdot\frac{2g}{v_1^2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}\right)^2 = \frac{r_2}{r_1}$

Daraus folgt, dass $\frac{t_2}{t_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{r_2}{r_1}$.

d) Welche Endgeschwindigkeiten erreichen zwei Kugeln gleichen Durchmessers aus verschiedenen Materialien mit den Massen m_1 = 8 g und m_2 = 4 kg. Welche Energien haben sie dann und welche Höhen haben sie durchfallen bis sie ihre Endgeschwindigkeiten erreicht haben?

Lösung:

Im Gleichgewicht gilt: $F_{zu} = F_{ab} \Leftrightarrow m \cdot g = k \cdot v^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}}$

$$v_1 = \sqrt{\frac{m_1 \cdot g}{k}} = \sqrt{\frac{0{,}008kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{0{,}002\frac{kg}{m}}} = \sqrt{39{,}24\frac{m^2}{s^2}} = 6{,}26\frac{m}{s} \quad v_2 = \sqrt{\frac{4kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{0{,}002\frac{kg}{m}}} = \sqrt{19620\frac{m^2}{s^2}} = 140{,}07\frac{m}{s}$$

$$E_1 = \tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}008kg \cdot 39{,}24\frac{m^2}{s^2} = 0{,}157J \quad \tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = m_1 \cdot g \cdot h_1 \Leftrightarrow h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{39{,}24\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = 2m$$

$$E_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 4kg \cdot 19620\frac{m^2}{s^2} = 39240\frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 39240J \quad h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{19620\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = 1000m$$

5) Ein Knetklumpen und ein (idealer) Ball gleicher Masse m werden nacheinander mit gleicher Geschwindigkeit v gegen eine beweglich aufgehängte Wand der Masse M (m << M) geworfen. Was beobachtet man jeweils bei der Wand? Begründe deine Antwort mit Hilfe der entsprechenden Gleichungen.

Lösung:

Die Wand bewegt sich nach dem Auftreffen zusammen mit dem Knetklumpen mit der Geschwindigkeit u_1. Sie hat fast den ganzen Impuls m·v des Knetklumpens aufgenommen.

Impulsbilanz Knetklumpen: $m \cdot v + M \cdot 0\frac{m}{s} = (m+M) \cdot u_1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{m}{m+M} \cdot v$

Die Wand bewegt sich nach dem Auftreffen mit der Geschwindigkeit u_2, die ungefähr doppelt so groß ist wie u_1 weil die Wand ungefähr den doppelten Impuls des Balles 2·m·v aufgenommen hat.

Impulsbilanz idealer Ball: $m \cdot v + M \cdot 0\frac{m}{s} = m \cdot (-v) + M \cdot u_2 \Leftrightarrow u_2 = \frac{2m}{M} \cdot v \approx 2 \cdot \frac{m}{m+M} \cdot v = 2 \cdot u_1$

6) Aufgabe von Herrn Leisen

»Ich habe eine Frage...«

Zweimal 50 ist nicht 100

»Angenommen, ein Auto fährt mit Tempo 50 frontal gegen ein gleichartiges und gleichschweres Fahrzeug, das ebenfalls 50 km/h schnell ist. Sind die Aufprallfolgen für Fahrzeug und Insassen die gleichen, als wäre das Auto mit 100 km/h gegen eine Wand gefahren?«

Berthold Becker, Offenbach

Kommt glücklicherweise nur selten vor: präziser Frontalaufprall.

a) Beantworte als Fachredakteur die Leserfrage in der nächsten Ausgabe der ADAC-Zeitschrift.

Lösung:

Erfreulicher Weise sind die beiden Unfälle nicht gleich. Beim Zusammenstoß der beiden Fahrzeuge mit jeweils 50km/h gibt jedes den Impuls m·v ab, insgesamt also 2·m·v. Jedes Fahrzeug gibt *außerdem die Energie $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ ab, d.h. insgesamt $m\cdot v^2$ aber es stehen auch 2 Knautschzonen zur Verfügung um die beiden Energiebeträge aufzunehmen, d.h. jede Knautschzone $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$. Beim Aufprall mit 2v gegen eine Wand gibt das Fahrzeug $2\cdot m\cdot v$ ab (wie vorher die beiden Fahrzeuge). Es müsste die 4-fache Energie $\frac{1}{2}\cdot m(2v)^2 = 4\cdot 1/2\cdot m\cdot v^2$ von einer Knautschzone aufgenommen werden, was zusätzlich die Zeitspanne Δt verkürzt, in der Impuls und Energie abgegeben werden und damit F weiter erhöht.*

b) Was kann man zur Verletzungsgefahr der Insassen jeweils sagen? Begründe Deine Antwort.

Lösung:

Für jeden Insassen gilt beim Zusammenstoß mit jeweils v: $\Delta p=m_P\cdot v$. Er gibt einen Impulsstrom der Stärke $F_1 = \Delta p/\Delta t = m\cdot v/\Delta t$ ab.
Für die Insassen würde beim Aufprall mit 2v gegen Wand gelten: $\Delta p=m_P\cdot 2v$, wodurch die Stärke des Impulsstromes doppelt so hoch wäre: $F_2 = 2\cdot m\cdot v/\Delta t = 2\cdot F_1$. Es müsste die 4-fache Energie $\frac{1}{2}\cdot m(2v)^2 = 4\cdot 1/2\cdot m\cdot v^2$ von einer Knautschzone aufgenommen werden, was zusätzlich die Zeitspanne Δt verkürzt, in der Impuls und Energie abgegeben werden und damit F weiter erhöht.